

# **Movimiento plano de barras gruesas rectas y curvas de sección uniforme no homogénea**

C.P. Filipich

# **Movimiento plano de barras gruesas rectas y curvas de sección uniforme no homogénea**

C.P. Filipich



Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark



Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España  
[www.cimne.com](http://www.cimne.com)

Primera edición: Mayo 2012

**MOVIMIENTO PLANO DE BARRAS GRUESAS RECTAS Y CURVAS DE SECCIÓN UNIFORME NO HOMOGÉNEA**

Monografía CIMNE M129

© Los autores

ISBN: 978-84-940243-0-6

Depósito legal: B-18334-2012

***Dedicatoria y Agradecimiento***



Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

***A la vez agradezco a la Ing. Claudia A. Egidi por las valiosas observaciones durante la escritura y organización del trabajo.***



Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

## Índice

	Resumen	1
	Abstract	3
	Un comentario liminar previo a la Introducción	5
	Introducción.	6
	<u>Parte Primera:</u> Barras Rectas Gruesas	
1	Presentación del Modelo	10
1.1	Hipótesis, Definiciones y Propiedades	11
1.2	Esfuerzo Axial y Momento Flector. Ubicación del origen "yz"	12
1.3	Expresión del Esfuerzo de Corte. Factor de Corte.	15
1.3.1	Energía de Deformación.	16
1.4	Ecuaciones de Movimiento y C.B. para Barras Rectas Gruesas	18
1.5	Vibraciones Naturales. Condiciones de Ortogonalidad (CO)	20
1.6	Vibración Forzada en Barras Rectas. Superposición Modal	21
	<u>Parte Segunda:</u> Barras Curvas Gruesas, Barras Rectas Gruesas Ficticias, Teorema General	
2	Barras Curvas Gruesas Presentación del Modelo	25
2.1	Hipótesis, Definiciones y Propiedades	26
2.2	Esfuerzo Axial y Momento Flector. Ubicación del origen "yz"	28
2.2.1	Caso de $E(y_G, z) = E_0$ constante ( $\psi_1(y_G, z) = 1$ )	30
2.3	Expresión del Esfuerzo de Corte. Factor de Corte	30
2.3.1	Energía de Deformación	32
2.4	Sistema diferencial de Movimiento y sus C.B	34
2.5	Vibraciones Naturales. Condiciones de Ortogonalidad (CO)	36
2.6	Vibración Forzada En Barras Curvas. Superposición Modal	38
	Barras Rectas Gruesas Ficticias	
2.7	Desarrollo de la Idea: Resultado Fundamental	41
	Teorema General	44
	<u>Parte Tercera:</u> Dos Tipos de Superposición Tensional para hallar la Distribución de Tensiones Tangenciales cuando el Módulo de Young es Variable "A Saltos" en la Sección	
3	Generalidades	45
3.1	Método I de Superposición	48
3.2	Método II de Superposición	56

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

	<u>Parte Cuarta:</u> Tensiones Tangenciales que Satisfacen las Ecuaciones de Equilibrio	
4	Generalidades	66
A	Algunas soluciones homogéneas	66
B	Soluciones particulares para secciones con único módulo de Young ( $\varphi_1(y_G, z) = k$ )	69
	<u>Parte Quinta:</u> Aplicaciones	71
	<u>Aplicación 1.</u> Tensiones tangenciales y factor de corte en barras gruesas	72
	<u>Aplicación 1.1.</u> Tensiones tangenciales y factor de corte en <u>barras rectas gruesas</u>	72
	Ejemplo 1 Barra recta de sección trapezoidal homogénea	72
	Ejemplo 2 Barra recta de sección rectangular homogénea	74
	Ejemplo 3 Barra recta de sección rectangular hueca homogénea	75
	Ejemplo 4 Barra recta gruesa de sección rectangular con parámetros funcionalmente graduados	78
	Ejemplo 5 Barra recta de sección rectangular no homogénea con tres (3) sectores de igual ancho	81
	Ejemplo 6 Barra recta de sección rectangular no homogénea con dos (2) sectores de igual ancho	83
	<u>Aplicación 1.2.</u> Tensiones tangenciales y factor de corte en <u>barras curvas gruesas</u>	
	Ejemplo 7 Barra curva de sección trapezoidal homogénea	85
	Ejemplo 8 Barra curva de sección rectangular homogénea.	88
	Ejemplo 9 Barra curva de sección homogénea doble "T"	89
	Ejemplo 10 Barra curva de sección rectangular hueca homogénea de espesor variable	95
	Ejemplo 11 Barra curva de sección rectangular hueca homogénea de espesor constante	98
	Ejemplo 12 Barra curva de sección rectangular no homogénea con tres (3) subdominios de igual ancho y distinta altura	100
	Ejemplo 13 Barra curva gruesa de sección rectangular con parámetros funcionalmente graduados	104
	Ejemplo 14 Barra curva gruesa de sección rectangular con parámetros funcionalmente graduados	107
	Ejemplo 15 Barra curva de sección rectangular no homogénea con tres (3) fajas de igual altura y módulos diferentes. Solución a través del Método I de Superposición	109

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

	<u>Aplicación 1.3. Tensiones tangenciales y factor de corte en barras rectas gruesas ficticias</u>	
Ejemplo 16	Barra recta ficticia de sección trapezoidal homogénea	114
Ejemplo 17	Barra recta ficticia de sección rectangular no homogénea con tres (3) subdominios de igual ancho y distinto material	115
Ejemplo 18	Barra recta ficticia de sección trapezoidal de material funcionalmente graduado	117
Ejemplo 19	Barra recta ficticia de sección elíptica de material homogéneo	119
Ejemplo 20	Barra recta ficticia de sección rectangular de material funcionalmente graduado. Aplicación del Teorema General para hallar los factores de corte	122
	<u>Aplicación 2. Cálculo de Frecuencias Naturales</u>	
	<u>Aplicación 2.1 Frecuencias Naturales de Barras Rectas Gruesas</u>	126
	<u>Aplicación 2.2 Frecuencias Naturales de Barras Curvas Gruesas</u>	129
	<u>Parte Sexta: Apéndices</u>	
<u>Apéndice 1</u>	Barras Gruesas: Ecuaciones Locales De Equilibrio Entre Esfuerzos Característicos	131
<u>Apéndice 2</u>	Barras Rectas: Condiciones De Ortogonalidad (CO) Entre Formas Modales	133
<u>Apéndice 3</u>	Barras Curvas: Condiciones De Ortogonalidad (CO) Entre Formas Modales	135
<u>Apéndice 4</u>	Condiciones de Bordo con Condiciones Adicionales que no son Independientes	137
<u>Apéndice 5</u>	Reducción de los sistemas diferenciales para vibraciones naturales a ecuaciones diferenciales ordinarias de sexto orden	139
<u>Apéndice 6</u>	Ecuación clásica de barras curvas delgadas (de pequeña curvatura) homogéneas.	142
<u>Apéndice 7</u>	Un Concepto Adicional	144
<u>Apéndice 8</u>	Comentarios acerca de la forma de deducir el factor de corte " $m$ "	144
	<u>Referencias</u>	146

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark





Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

## MOVIMIENTO PLANO DE BARRAS GRUESAS RECTAS Y CURVAS DE SECCIÓN UNIFORME NO HOMOGÉNEA

Carlos Pedro Filipich

Universidad Nacional del Sur  
Universidad Tecnológica Nacional  
Bahía Blanca, Argentina

### Resumen

*El divulgado uso estructural de barras gruesas tanto rectas como curvas gruesas en las distintas aplicaciones de las diversas ingenierías, hace que conocer su comportamiento dinámico frente a solicitaciones arbitrarias, constituya una finalidad que todo avance tecnológico requiere.*

*El presente trabajo abarca y extiende, dentro del marco de la Resistencia de Materiales (RM) y de materiales no homogéneos (materiales funcionales y/o compuestos), uno previo del autor que consiste en la teoría general de movimiento de piezas curvas gruesas homogéneas y que está desarrollado en el Capítulo primero de su Tesis Doctoral [1]. En éste se toman en consideración la totalidad de los aportes energéticos para hallar el sistema diferencial gobernante de vibración forzada. En el desarrollo general que presentaremos y que incluye entre otros a los temas nombrados, se aborda la posibilidad de que el módulo de elasticidad, el módulo de elasticidad transversal y la densidad puedan variar independiente y arbitrariamente en el dominio de la sección transversal (aunque de forma simétrica respecto del eje de simetría de la misma y que estudiamos el movimiento plano de piezas gruesas).*

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

*La teoría presentada incluye a la teoría clásica de barras delgadas rectas y curvas homogéneas (Bernoulli-Euler y barras de gran curvatura sometidas a flexión compuesta [2] [3] [4]) y como caso especial cuando tratamos barras rectas pero también homogéneas, a la denominada Teoría de Vigas Timoshenko [5].*

*Se desarrollan y se justifican teóricamente temas fundamentales tales como las expresiones que ligan constitutivamente al esfuerzo de corte con el régimen de deformación; la expresión general del factor de corte a través de la vía energética dependiendo de la distribución de las dos componentes de la tensión tangencial –una según el eje de simetría de la sección y perpendicular al mismo la otra– actuantes en elementos de área del plano de cada sección de la barra y debidas a un esfuerzo de corte  $Q$ . Una conclusión, que presentamos como “Resultado Fundamental”, permite obtener el régimen de tensiones tangenciales para barras curvas gruesas no homogéneas, por medio de barras rectas ficticias. Es decir, se manejan unas barras rectas (curvatura infinita) en las cuales modificando algunos parámetros físico-geométricos, pueden hallarse las tensiones tangenciales y con ellas el factor de corte de barras curvas.*

*Todavía el trabajo aporta la conclusión más importante en cuanto a la distribución de las tensiones tangenciales y con ésta el cálculo del factor de corte, que desarrollamos en la PARTE SEGUNDA denominándolo como **TEOREMA GENERAL**. Afirma que una vez hallada la distribución tangencial en algún tipo de barra gruesa –recta, curva o ficticia– un cálculo directo, con apropiados intercambios de parámetros físico-geométricos que dependen del tipo de barra y de la distribución de las no homogeneidades y forma de la sección transversal de la barra, permite conocer la distribución de las tensiones tangenciales en los otros dos tipos de barra con la misma sección.*

*Se incluyen otros dos resultados originales que se denominan métodos I y II de superposición –para los tres tipos de barras gruesas que el trabajo aborda– que, cuando las secciones de las barras modifican “a saltos” sus propiedades elásticas y de densidad, puede hallarse el régimen tensional combinando linealmente regímenes conocidos de secciones homogéneas. Esto simplifica notablemente el trabajo de búsqueda para estos tipos de sección no homogénea bajo estudio. Se encuentra también un acople flexo-axial del movimiento y se trabaja y se generaliza el concepto del corrimiento del eje neutro, imposición clásica en barras homogéneas de gran curvatura que permite no sólo simplificar el proceso algebraico sino que extiende naturalmente la definición de eje neutro que se utiliza tradicionalmente en barras rectas homogéneas.*

*Al desarrollar el ítem de vibraciones naturales de las barras gruesas partiendo de las ecuaciones de movimiento, tanto rectas como curvas, se encuentran las condiciones de ortogonalidad entre formas modales (extensión ad-hoc del tradicional modelo de Sturm–Liouville [6]) para ser utilizadas en una eventual superposición modal clásica en problemas lineales y separables, para hallar la respuesta dinámica del sistema (Vibración Forzada).*

*Algunos Apéndices y varios Ejemplos resueltos analítica y numéricamente completan el trabajo que permite inferir que los resultados encontrados coinciden con muy buena precisión con los hallados con otras metodologías aproximadas como son las de elementos finitos en 2D y 3D pero por medio de un encuadre mucho más directo, sencillo y abarcativo.*

*Cabe todavía agregar que la propuesta para llegar al régimen de tensiones tangenciales de las secciones de formas arbitrarias constitutivamente no homogéneas, y aún múltiplemente conexas, reemplaza a las utilizadas comúnmente para barras rectas homogéneas y que son conocidas como de Collignon o de Jourawsky. Por otro lado estas metodologías tradicionales serían prácticamente inadecuadas de utilizar para ciertos casos dentro del espectro de aplicaciones que presentamos. Fundamentalmente, lo dicho permite hallar el factor de corte de las secciones de barras gruesas y entonces completar los coeficientes del sistema diferencial que gobierna el movimiento de estos tipos estructurales.*

*Por último entendemos que el Resultado Fundamental, el **TEOREMA GENERAL**, los Métodos de Superposición, las Ecuaciones de Movimiento y las Condiciones de Ortogonalidad presentadas, son resultados originales dentro de la bibliografía afín.*

## PLANE MOTION OF STRAIGHT AND CURVED THICK BARS OF NON-HOMOGENEOUS UNIFORM SECTION

Carlos Pedro Filipich

*Universidad Nacional del Sur  
Universidad Tecnológica Nacional  
Bahía Blanca, Argentina*

### Abstract

The extended structural use of both straight and curved thick bars in different applications of the engineering fields makes the knowledge of their dynamic behaviour under arbitrary loading, a must in any technological development.

The present study comprehends and extends, within the Strength of Materials (SM) frame and non-homogeneous materials (functional and/or composite materials) a previous work of the author that consists in the general theory of the motion of homogeneous thick curved elements which is developed in the first chapter of his Doctoral Thesis [1]. There, all the energy contributions are taken into account to found the differential system that governs the forced vibrations.

In the presented general development that includes, among others, the mentioned topics, it is addressed the possibility that the longitudinal and transverse moduli of elasticity and the density can vary arbitrary and independently in the domain of the cross-section (although restricted to a symmetric way with respect to its axis of symmetry since the study deals with the plane motion of thick elements).

The presented theory includes the classical theory of homogeneous, straight and curved slender bars (Bernoulli-Euler and large curvature bars subjected to combined bending and axial forces [2] [3] [4]) and as a special case, when dealing with straight homogeneous bars, the so-called Timoshenko beam theory [5].

Basic topics are developed and theoretically founded, as the expressions that link constitutively the shear internal force to the strain regime, the general expression of the shear factor through the energy approach depending on the distribution of the two components of the shear stress—one along the symmetry axis of the section and the other, normal to it—acting on the area element of plane of the bar cross-section and due to a shear force  $Q$ . A conclusion, which will be presented as “Fundamental Result”, allows to obtain the shear stress regime for non-homogeneous thick curved bars by means of fictitious straight bars. That is, some physical-geometric parameters of the straight (infinite curvature) bars are handled in such a way that the shear stresses and the shear factor can be found for the curved beams.

Yet the work provides the more important result regarding the distribution of the shear stresses and with it, the calculation of the shear factor, that is developed in the SECOND PART naming it **GENERAL THEOREM**. It states that, once the distribution of the shear stresses on some type of a either straight, curve or fictitious, thick bar, a direct calculation with appropriate changes in the physical-geometrical parameters that depend on the type of bar, the distribution of the non-homogeneous properties and shape of the cross-section of the bar, allows to know the distribution of the shear stresses in the two other types of bars with the same cross-section.

Two other results are included that are named methods of superposition I and II, for the three types of thick bars addressed in the present study. These approaches allow to find the stress state when the elastic and density properties of the cross-sections modify discontinuously (in steps) by linearly combining known states of homogeneous sections. This procedure notably simplifies the search task for these type of non-homogeneous sections under study. Also, a bending-axial coupling is found. The concept of the neutral axis is deal with and generalized. This classical approach for large curvature homogeneous bars that permits not only the simplification of the algebraic process but also the natural extension of the definition of the neutral axis definition traditionally employed in homogeneous straight bars.

When dealing with the natural vibration of thick bars, the orthogonality conditions among the mode shapes are found from the equations of motion of both the straight and curved cases, as an *ad hoc* extension of the traditional Sturm-Liouville model [6]. These conditions are useful for an eventual classical superposition application to linear and separable problems in order to find the dynamic response of the system (forced vibration). Some Appendices and various Examples solved both analytically and numerically complete the work. It is inferred that the found results are coincident with very good accuracy with the values found with other approximated methodologies such as 2D and 3D finite elements, with the advantage of a more direct, simple and comprehensive framework.

It should still added that the present proposal to obtain the shear stress state of arbitrary shaped sections, constitutively non-homogeneous, and yet multiply connected, replaces the theories known as Collignon or Jourawsky, commonly employed for homogenous straight bars. On the other hand, these traditional methodologies would be practically inadequate to use for certain cases within the range of applications herein presented. Mainly, the above described method allows to find the shear factor of the thick bars sections and thus complete the coefficients of the differential system that governs the motion of these structural types.

Finally, it is believed that the Fundamental Result, the ***GENERAL THEOREM***, the Superposition Methods, the Equations of Motion and the Orthogonality Conditions presented throughout this work are original results within the related bibliography.

## UN COMENTARIO LIMINAR PREVIO A LA INTRODUCCIÓN

Cuando el autor controlaba los borradores del presente trabajo en el tramo correspondiente a las APLICACIONES (PARTE QUINTA) surge una conclusión definitiva en el estudio que nos ocupa. Al justificar que no era necesario abordar ciertos ejemplos, debido al aprovechamiento de lo que denominamos RESULTADO FUNDAMENTAL (la creación de la teoría de barras rectas ficticias (PARTE SEGUNDA) para resolver la distribución de tensiones tangenciales en barras curvas), se observa que la ecuación de equilibrio interno para barras rectas gruesas y la correspondiente a las barras rectas ficticias eran formalmente idénticas, para secciones con igual variación funcional de los materiales elásticos y de su densidad. Sólo debían intercambiarse algunos parámetros físico-geométricos y los resultados, servían—en cuanto a las tensiones tangenciales y el factor de corte se refiere— indistintamente, para ambos tipos estructurales. Evidentemente, por el RESULTADO FUNDAMENTAL, también resolvían la problemática de barras curvas gruesas. Habíamos demostrado lo que denominamos en el texto como **TEOREMA GENERAL**. En ese momento, con el trabajo finalizado distinguiendo los tipos estructurales, se llegaba a la profunda conclusión, de que se podía haber evitado distinguir entre barras rectas y curvas gruesas, siempre, destacamos, en lo atinente a las tensiones tangenciales y sus particulares consecuencias. Por otro lado, y debe tenerse claro, tenemos distinta formalidad en los sistemas diferenciales que rigen el movimiento de ambos esquemas. Además el cálculo de los parámetros físico-geométricos: " $\Delta$ ,  $A^\infty$  y  $J^\infty$ " para barras rectas, " $R$ ,  $A^R$  y  $J^R$ " para barras curvas y " $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}^*$ " de barras rectas ficticias (con  $R$ ,  $A^R$  y  $J^R$  de las barras curvas correspondientes) dependen del tipo estructural bajo estudio. Debido a todas estas causas, y a que tradicionalmente la bibliografía distingue drásticamente entre barras rectas y barras curvas, decidimos mantener la presentación clásica. Es decir, disponiendo de un resultado original muy fuerte como es el **TEOREMA GENERAL**, igualmente desarrollamos el presente trabajo partiendo de barras rectas gruesas e independientemente a continuación se plantea la teoría de barras curvas gruesas.

## INTRODUCCIÓN.

El presente desarrollo consiste en hallar la respuesta dinámica en su plano de piezas gruesas de ejes rectos y circunferenciales de sección transversal uniforme y con al menos un eje de simetría contenido en el plano del movimiento y sometidas a cargas arbitrarias variando con el espacio y con el tiempo.

Se trabaja dentro de la RM clásica, cuyas hipótesis más importantes son:

- 1) Las secciones planas perpendiculares al eje de la pieza antes de la deformación, se mantienen planas durante la misma aunque no necesariamente perpendiculares al eje deformado.
- 2) Las secciones planas perpendiculares al eje de la pieza antes de la deformación no cambian su forma durante la misma.
- 3) Las tensiones normales actuando sobre elementos de área con normal perpendicular al eje de la pieza son nulas.
- 4) En esta aproximación clásica, de las tres ecuaciones diferenciales de equilibrio interno que garantizan el equilibrio a la translación que obtenemos de la Mecánica del Continuo, sólo apelamos a la correspondiente al sentido del eje de la pieza.

Una hipótesis adicional conceptualmente importante será destacada y aceptada cuando planteemos las energías de deformación tanto para barras gruesas rectas como curvas. (Véase detalle en APÉNDICE 7).

Se toman en cuenta los aportes energéticos por deformación axial, flexional y por corte así como la energía cinética de cada elemento de masa de la barra curva, por lo cual tendremos influencia en el movimiento tanto de la inercia translacional como rotatoria.

Cuando las secciones de barras rectas gruesas no son homogéneas, la definición clásica de eje neutro, como desarrollaremos, da lugar a que este eje neutro no es baricéntrico. En cuanto a barras de gran curvatura, el eje neutro, localizado con la misma filosofía, no es baricéntrico, ni para piezas homogéneas [3] [4], tampoco, evidentemente, para secciones no homogéneas.

Al considerar materiales no homogéneos cuyas características físicas varían funcionalmente en las secciones, el radio neutro puede ser mayor o menor que el radio baricéntrico. Particularmente conocemos que, para barras curvas de material homogéneo, el corrimiento del eje neutro se produce hacia el centro de curvatura.

Se generaliza el procedimiento de solución, abordando secciones múltiplemente conexas (con huecos) lo que en general dificulta las expresiones que nos dan la distribución de las tensiones tangenciales, y, consecuentemente la determinación del factor de corte, parámetro fundamental de esta teoría. En efecto. Este parámetro se encuentra a través de un enfoque energético que depende del tensor de tensiones actuante. A su vez esta problemática está ligada fuertemente a la relación constitutiva entre el esfuerzo de corte y las relaciones cinemáticas de deformación. Esta relación constitutiva junto con la distribución de las tensiones tangenciales debidas al esfuerzo de corte  $Q$  y el factor de corte son algunos de los aportes destacados del presente trabajo.

Agreguemos que la propuesta constitutiva señalada se justifica teóricamente, para arribar sin argumentos retóricos ni omisiones a la relación definitiva.

Por tratarse de una teoría lineal –deformaciones de pequeña magnitud relativa, ecuaciones constitutivas lineales, y ecuaciones de equilibrio esencialmente lineales– es muy cómodo, con energía de deformación cuadrática y homogénea, utilizar el Teorema de Hamilton para hallar el sistema diferencial de movimiento y sus correspondientes Condiciones de Borde (**CB**). Como se observará en su deducción se presenta un inevitable acople dinámico entre inercia flexional y axial del cual no se puede afirmar a priori que sea ni necesaria ni numéricamente despreciable. (Este acople no existe para barras rectas gruesas homogéneas (Vigas Timoshenko)).

El uso de la RM y secciones uniformes permite obtener un sistema diferencial en función de la coordenada axial a coeficientes constantes en las tres componentes básicas del campo de desplazamientos que gobierna el movimiento de las barras gruesas, sea el material homogéneo o no el sistema formalmente siempre es el mismo; sólo deben modificarse los coeficientes que dependen de la forma de la sección y/o la calidad del material utilizado y especialmente, y de acuerdo a la distribución de tensiones tangenciales que conlleva la dependencia fundamental del factor de corte .

Debido a que el factor de corte, como señalamos, es un valor primordial en el estudio que nos ocupa al considerar el aporte energético de todos los tipos de deformación incluyendo la de corte, entendemos que conviene extendernos unas pocas líneas sobre esta problemática. No existe en la bibliografía uniformidad ni de criterios ni de valores para el factor de corte. Nuestra deducción se basa en la energía elástica complementaria de deformación, que para materiales Hookeanos y teoría clásica de deformación coincide con la energía potencial elástica almacenada por el sistema durante una deformación genérica. Desde este punto de vista hallamos para cualquier caso el factor de corte. Sin embargo ciertas discrepancias ya se presentan en barras rectas. Por ejemplo en la referencia [4] para una sección rectangular de material homogéneo se adopta el valor 1.5 cuando energéticamente sabemos que para igual caso obtenemos 1.2. En las referencias [7] [8] exclusivamente para barras curvas se presentan todavía valores distintos. En la referencia [9] se puede hallar una extensa discusión sobre el tema. La cuestión se complica aún más cuando –como veremos en los próximos ítems– el factor de corte no sólo depende de la forma de la sección, sino de la distribución de los módulos de Young y de elasticidad transversal y en barras curvas todavía del radio de curvatura de la pieza. En las referencias [10] [11] se incluyen varias alternativas para el caso de barras curvas en el contexto de lograr coincidencia entre estados elásticos planos y la RM. Nosotros coherentemente utilizamos el encuadre energético especialmente basada en la distribución de las dos componentes de tensiones tangenciales. Evidentemente deben satisfacer condiciones de equilibrio interno y las condiciones de reciprocidad tanto en las fronteras externas como internas de una sección con huecos y/o las condiciones de continuidad entre capas de diversos materiales



que conforman una sección no homogénea (en realidad siempre se trata de condiciones de reciprocidad de las tensiones tangenciales de dirección normal a la frontera). Esta búsqueda puede constituir una tarea algebraicamente engorrosa. Varios ejemplos de distribución tensional y sus correspondientes factores de corte son incluidos en la PARTE QUINTA de esta presentación.

Todavía, alguna bibliografía [12] [13] [14], toma un factor de corte único  $-m = 6/5$  ó  $m = 20/17$  – aún para secciones no homogéneas con materiales funcionalmente graduados.

A las hipótesis de RM enunciadas, agreguemos que sobre el eje neutro de la barra actúan cargas espacio–temporales distribuidas por unidad de longitud y reducidas al eje neutro y que dividimos en tres tipos: una fuerza normal al eje de la pieza, una fuerza en sentido del eje de la barra y un momento distribuido sobre el mismo eje y que proviene de eventuales cargas en sentido del eje aplicadas en las fronteras de la pieza (intradós y extradós). La hipótesis de considerar un eje –recto o curvo en el presente estudio– bajo cargas dinámicas generales y que el mismo posea rigidez flexional, axial y por corte y que contenga las inercias translacional y rotatoria del cuerpo es la base y ventaja de la RM. Se trata de una teoría aproximada para problemas inevitablemente 3D pero reduciendo el análisis a 1D.

Se cuenta, entonces, desde hace más de un siglo y medio con este enfoque para afrontar problemas de gran complejidad que en principio permiten ser abordados más o menos sencillamente y lograr una notable precisión de resultados. Una herramienta 3D daría lugar a un planteo numérico típicamente complicado y con un empleo de gran tiempo computacional. De todas maneras resolver –en esta caso barras gruesas no homogéneas– por medio de la presente teoría, permitirá siempre calibrar con relativa simplicidad las aludidas aproximaciones bi o tridimensionales. Esta propiedad de la RM de poder convalidar resultados estrictamente numéricos como los que provienen de diferencias finitas o elementos finitos, es fundamental y aumenta el sentido ingenieril y la plena actualidad de la teoría clásica de RM que nos ocupa.

Sería imposible enumerar la cantidad de trabajos basados en la RM dentro de la ingeniería estructural. Este divulgado marco justifica y motiva la búsqueda de las ecuaciones generales de movimiento de barras gruesas y que deduciremos en las próximas secciones que sin embargo provienen de una cuidadosa elaboración analítica. No está demás aclarar que estas teorías incluyen como caso particular las ecuaciones de movimiento de la teoría de barras rectas y curvas delgadas conocidas como de Bernoulli–Euler.

El trabajo incluye el caso especial de trabajar en ausencia de esfuerzos aplicados aceptando modos armónicos de vibración que nos conduce al problema clásico de frecuencias naturales del sistema y las formas modales correspondientes del sistema estructural bajo estudio, resolviendo el sistema diferencial sin términos de carga y plantear las CB homogéneas. El trabajo contiene además la deducción de las condiciones de ortogonalidad que deben verificar entre sí las formas modales o los esfuerzos modales característicos. Estas condiciones se

hallan con un planteo especial de Sturm–Liouville que como veremos corresponde a un problema diferencial de sexto orden en la coordenada espacial, tanto para barras rectas como curvas.

Entendemos que el **RESULTADO FUNDAMENTAL**, el **TEOREMA GENERAL**, los **MÉTODOS DE SUPERPOSICIÓN**, las Ecuaciones de Movimiento y las Condiciones de Ortogonalidad deducidas son resultados originales dentro de la bibliografía que el autor maneja desde hace varias décadas.

Con estos resultados previos, dispondremos del desarrollo completo para calcular bajo cargas dinámicas cualesquiera, el movimiento plano (o vibración forzada) de la barra arbitrariamente vinculada a tierra, puede ser resuelto por medio del denominado método de superposición modal. Como se sabe debe recurrirse a las Condiciones de Ortogonalidad a las que nos referimos en el párrafo anterior. Un ejemplo de vibración forzada en su plano de un anillo circunferencial grueso de sección múltiplemente conexas de tres capas se presenta detalladamente en la referencia [15].

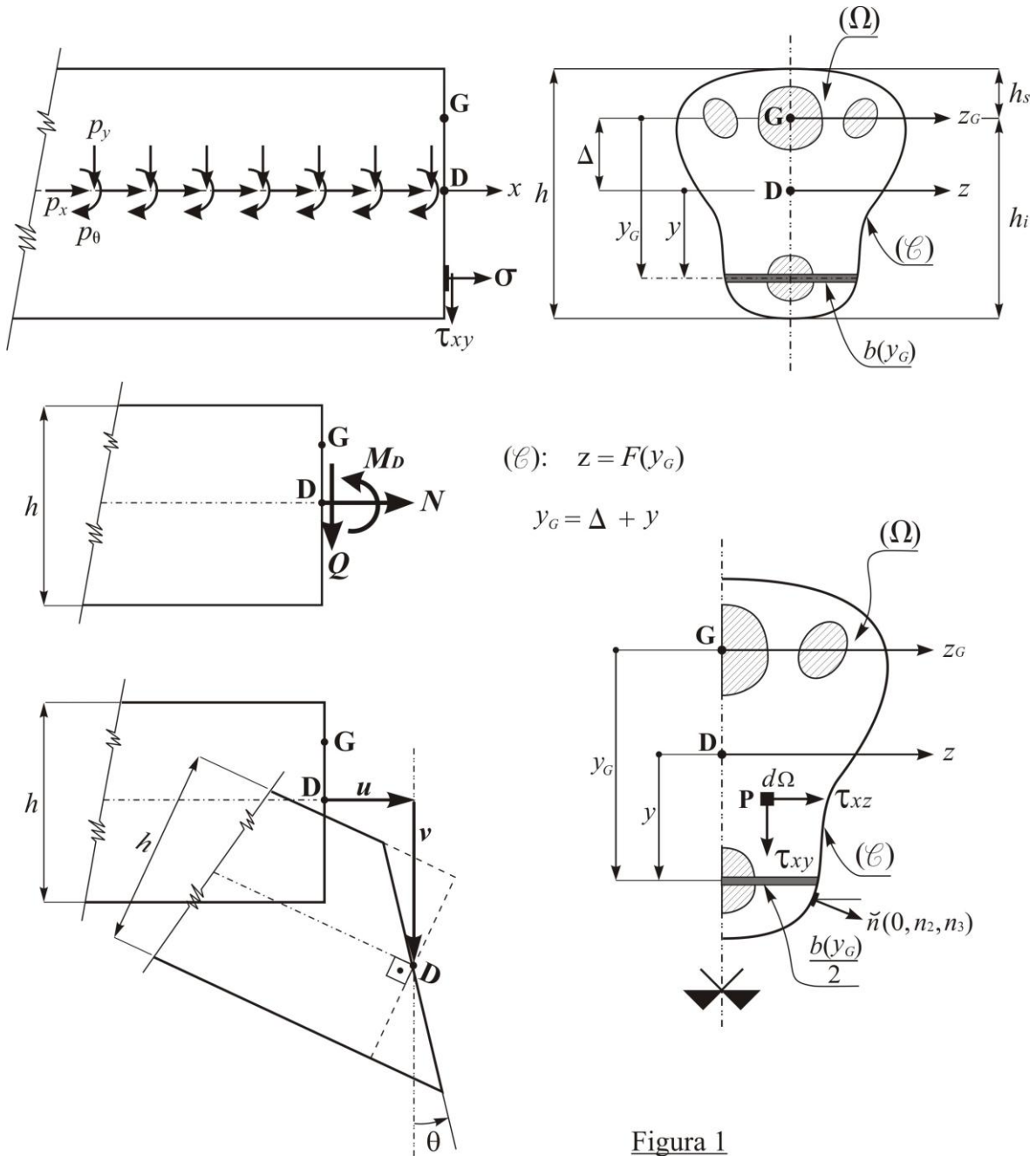
En la referencia [16] y siempre basados en la teoría que nos ocupa se puede hallar un estudio paramétrico de la vibración natural de barras curvas gruesas de sección rectangular vinculadas arbitrariamente y diseñadas con materiales funcionalmente graduados, donde el módulo de elasticidad, el transversal y la densidad varían independiente en función de la coordenada  $y_G$  contenida en el plano de simetría de la sección.

Carlos Pedro Filipich



# PARTE PRIMERA BARRAS RECTAS GRUESAS

## 1. PRESENTACIÓN DEL MODELO



### 1.1. HIPÓTESIS, DEFINICIONES Y PROPIEDADES (FIGURA 1)

En la figura se muestra un elemento estructural genérico. Dos puntos especiales deben tenerse en cuenta: el centroide " $G$ "  $\equiv$  baricentro geométrico y el punto " $D$ " por donde pasará el eje neutro " $z$ " una vez definida la condición correspondiente para su ubicación. La sección en general múltiplemente conexas, tiene al menos un eje de simetría que coincide con el plano de movimiento. Las fronteras ( $\mathcal{C}$ ):  $z = F(y_G)$  que encierran al dominio de interés y/o a los huecos, deben estar definidas por funciones no necesariamente biyectivas ni analíticas.

Trabajaremos dentro de la RM. Las inhomogeneidades consideradas en este trabajo sólo se presentan en cada sección plana transversal pero es invariable con la coordenada espacial " $x$ ". Entonces si  $E = E(y_G, z)$ ,  $G = G(y_G, z)$  y  $\rho = \rho(y_G, z)$  son respectivamente el módulo elástico o de Young, el módulo de elasticidad transversal o de corte y la densidad, imponemos que

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cdot \varphi_1(y_G, z) & (a) \\ G &= G_0 \cdot \varphi_2(y_G, z) & (b) \\ \rho &= \rho_0 \cdot \varphi_3(y_G, z) & (c) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Siendo  $E_0$ ,  $G_0$  y  $\rho_0$  valores arbitrarios de referencia. Por la simetría adoptada se verifica que

$$\varphi_j(y_G, z) = \varphi_j(y_G, -z); \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

Las  $\varphi_j(y_G, z)$ , ( $j = 1, 2, 3$ ), no son necesariamente analíticas.

El campo de desplazamientos adoptado para un punto genérico " $P$ " de la barra recta de coordenadas  $(x, y, z)$  será: ( $y = y_G - \Delta$ )

$$\begin{aligned} u_P &= \tilde{u}(x, y_G, t) = u(x, t) + \theta(x, t) \cdot y & (a) \\ v_P &= \tilde{v}(x, y_G, t) = v(x, t) & (b) \\ w_P &= \tilde{w}(x, y_G, t) = 0 & (c) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Indicamos como  $t$  la coordenada temporal y como  $u = u(x, t)$  al desplazamiento axial en " $D$ ",  $v = v(x, t)$  al desplazamiento transversal en " $D$ " y  $\theta = \theta(x, t)$  al giro flexional alrededor del eje " $z$ " pasante por " $D$ ". El desplazamiento en sentido " $z$ " es nulo por hipótesis. El giro flexional  $\theta(x, t)$  en general no coincidirá con  $-\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$  (giro del eje).

O sea estamos considerando aportes axiales, flexionales y por corte.

Dentro de la RM las únicas componentes del tensor de deformación lineal en coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  para el punto "P" son (recordar hipótesis 2 de la INTRODUCCIÓN):

$$\varepsilon = \varepsilon_x = \frac{\partial u_P}{\partial x} \quad (a)$$

$$\gamma = \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} \quad (b) \quad (1.4)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w_P}{\partial z} \quad (c)$$

Si  $(\cdot)' \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}, \dots$ , tendremos que:

$$\varepsilon = u' + y \cdot \theta' \quad (a)$$

$$\gamma = \theta + v' \quad (b) \quad (1.5)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (c)$$

Aceptamos que  $\varepsilon > 0$  cuando se alargan las fibras paralelas al eje "x" y  $\gamma > 0$  cuando el ángulo entre filamentos paralelos a "x" y a "y" se abre (esto se debe al signo positivo adoptado para  $\theta$ ).

De acuerdo a la Ley de Hooke las componentes del tensor de tensiones siendo  $\sigma_y = \sigma_z = 0$  por la hipótesis 3, valen:

$$\sigma = \sigma_x = E(y_G, z) \cdot \varepsilon = E_0 \cdot \varphi_1(y_G, z) \cdot \varepsilon \quad (a)$$

$$\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx} = G(y_G, z) \cdot \gamma = G_0 \cdot \varphi_2(y_G, z) \cdot \gamma \quad (b) \quad (1.6)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G(y_G, z) \cdot \gamma_{xz} = 0 \quad (c)$$

La expresión constitutiva (1.6b) no se considera dentro de la teoría que estamos trabajando. Por ahora tampoco podemos constitutivamente hallar " $\tau_{xz}$ " que en general no es nula.

La convención que aceptamos para las tensiones tangenciales " $\tau_{xy}$ " y " $\tau_{xz}$ " es que son positivas cuando actuando sobre en elemento de área de la sección con normal saliente positiva (x creciente), tienen respectivamente las direcciones de las coordenadas "y" y "z". En cuanto a la tensión normal " $\sigma$ " es positiva cuando actuando sobre en elemento de área de la sección con normal saliente positiva tiene igual dirección (tracción).

## 1.2. ESFUERZO AXIAL Y MOMENTO FLECTOR. UBICACIÓN DEL ORIGEN "yz"

Para simplificar el proceso algebraico es conveniente ubicar el eje neutro "z" que pasa por el punto "D" bajo una clásica condición que indicamos a continuación.

Sean " $N$ " y " $M_D$ " el esfuerzo axial y el momento flector reducido al eje neutro definidos como:

$$N = \iint_{\Omega} \sigma d\Omega \quad ; \quad M_D = \iint_{\Omega} \sigma \cdot y d\Omega \quad (1.7)$$

siendo  $\Omega$  el área de la sección y  $d\Omega$  un elemento de área que vale:

$$d\Omega = dy dz = dy_G dz = b(y_G) dy_G \quad (1.8)$$

Introducimos los siguientes coeficientes físico-geométricos

$$\alpha_j^\infty \equiv \int_{-h_s}^{h_i} \lambda^\infty(y_G) \cdot y^j dy_G \quad (j=0,1,2) \quad (1.9)$$

donde

$$\lambda^\infty(y_G) \equiv \int_{-\frac{b(y_G)}{2}}^{\frac{b(y_G)}{2}} \phi_1(y_G, z) dz \quad (1.10)$$

NOTA 1.1: Si el módulo de Young es igual a  $E_0$ , entonces  $\phi_1(y_G, z) = 1$  y  $\lambda^\infty(y_G) = b(y_G)$ .

Siendo  $\lambda^\infty(y_G) > 0$  se verifica que  $\alpha_0^\infty > 0$  y  $\alpha_2^\infty > 0$ .

Las expresiones (1.7) de acuerdo a (1.5a), (1.6a) y (1.9) se escriben como

$$N = E_0 (\alpha_0^\infty u' + \alpha_1^\infty \theta') \quad (a) \quad (1.11)$$

$$M_D = E_0 (\alpha_1^\infty u' + \alpha_2^\infty \theta') \quad (b)$$

Para  $N \neq 0$  y  $M_D \neq 0$  el eje paralelo a "z" donde  $\varepsilon = \sigma = 0$  (observar (1.5a)), pasa a una distancia "y = a" del eje "z" y entonces:

$$a = -\frac{u'}{\theta'} \quad (1.12)$$

o todavía por (1.11):

$$a = \frac{\alpha_2^\infty N - \alpha_1^\infty M_D}{\alpha_1^\infty N - \alpha_0^\infty M_D} \quad (1.13)$$

Hemos definido el eje neutro para un caso de flexión compuesta. Es tradicional, sin embargo, denominar como eje neutro a aquél eje "z" donde  $\varepsilon = \sigma = 0$  cuando  $N = 0$ . Fijamos entonces el origen "D" bajo la condición

$$a = 0 \quad \text{cuando} \quad N = 0 \quad (1.14)$$

De acuerdo a (1.13) deberá cumplirse

$$\alpha_1^\infty = 0 \quad (1.15)$$

NOTA 1.2: Si el módulo de Young es igual a  $E_0$ , entonces  $\phi_1(y_G, z) = 1$ , y como se sabe, el eje neutro será baricéntrico.

Recordando que:

$$y_G = \Delta + y \quad (1.16)$$

y obteniendo por integración directa el valor de:

$$\alpha_0^\infty \equiv \int_{-h_s}^{h_i} \lambda^\infty(y_G) dy_G \quad (1.17)$$

vemos que debido a la definición (1.15)

$$\Delta = \frac{\int_{-h_s}^{h_i} \lambda^\infty(y_G) \cdot y_G dy_G}{\alpha_0^\infty} \quad (1.18)$$

(ver figura 1).

A su vez considerando (1.18) vemos que:

$$\alpha_2^\infty = -\Delta^2 \alpha_0^\infty + \int_{-h_s}^{h_i} \lambda^\infty(y_G) \cdot y_G^2 dy_G \quad (1.19)$$

y también  $\alpha_2^\infty$  surge por integración directa.

Introducimos los dos siguientes coeficientes:

$$A^\infty \equiv \alpha_0^\infty \quad ; \quad J^\infty \equiv \alpha_2^\infty \quad (1.20)$$

donde a " $A^\infty$ " la denominamos como área material de la sección y a " $J^\infty$ " como momento material de inercia. De esta manera obtenemos las expresiones constitutivas definitivas de  $N$  y  $M_D$  (ver exp. (1.11) y (1.20)):

$$N = E_0 A^\infty u' \quad (a) \quad (1.21)$$

$$M_D = E_0 J^\infty \theta' \quad (b)$$

y entonces por (1.5a), (1.6a) y (1.21) escribimos que:

$$\sigma = \varphi_1(y_G, z) \cdot \left( \frac{N}{A^\infty} + \frac{M_D}{J^\infty} y \right) \quad (1.22)$$

con una fuerte reminiscencia con la teoría clásica de barras rectas homogéneas.

NOTA 1.3: Si  $\varphi_1(y_G, z) = \text{constante}$ , observamos que  $A^\infty = \alpha_0^\infty = \Omega$ ,  $\Delta = 0$  y  $J^\infty = \alpha_2^\infty = J_G$  (momento de inercia baricéntrico de la sección). Más aún. Como se desprende de (1.18), si se verifica la condición  $\iint_{\Omega} \varphi_1(y_G, z) \cdot y_G d\Omega = 0$ , también  $\Delta = 0$

(esta condición incluye el caso  $\varphi_1(y_G, z) = \text{constante}$ , donde  $\lambda^\infty(y_G) \equiv b(y_G)$ ).



### 1.3 EXPRESIÓN DEL ESFUERZO DE CORTE. FACTOR DE CORTE.

Como dijimos la expresión (1.6b) no se utiliza porque no satisface las condiciones de equilibrio local ni la compatibilidad de deformación pues proviene de una fuerte hipótesis (aunque típica y muy buena) de la RM, y que es la imposición del mantenimiento de secciones planas durante la deformación. Recurrimos entonces a buscar las expresiones de las componentes " $\tau_{xy}$ " y " $\tau_{xz}$ " (ésta, desde ya, no aparecía siquiera constitutivamente) del tensor de tensiones en coordenadas cartesianas ortogonales  $(x, y, z)$ , por medio de la ecuación de equilibrio interno estático en sentido del eje " $x$ " en ausencia de fuerzas de volumen. En barras rectas las tensiones tangenciales clásicamente se encuentran por la fórmulas conocidas como de Collignon o de Jouravsky [3] [4]. Dicha ecuación estática de equilibrio interno como sabemos es entonces:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \sigma' = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \sigma' = 0 \quad (1.23)$$

También conocemos que del equilibrio entre esfuerzos característicos  $N$ ,  $M_D$  y  $Q$  para un elemento diferencial recto en ausencia de fuerzas aplicadas se verifica que: (ver APÉNDICES 1 y 8)

$$\begin{aligned} N' &= 0 \quad (a) \\ Q' &= 0 \quad (b) \\ M_D' - Q &= 0 \quad (c) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Por lo tanto la expresión de  $\sigma'$  teniendo en cuenta la expresión (1.22) valdrá:

$$\sigma' = \varphi_1(y_G, z) \cdot \frac{Q}{J_\infty} y \quad (1.25)$$

De esta manera la expresión (1.23) se reescribe como:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\varphi_1(y_G, z) \cdot \frac{Q}{J_\infty} y = \varphi_1(y_G, z) \cdot \frac{Q}{J_\infty} (\Delta - y_G) \quad (1.26)$$

Ahora bien la solución de la ecuación diferencial (1.26) es en general teóricamente imposible. Baste pensar que tenemos dos funciones incógnitas y una sola ecuación. Para ciertas  $\varphi_1(y_G, z)$  y algunos dominios de integración, será posible hallar una solución viable. Es decir aceptando que la misma existe y es única, hallando una solución de prueba sin constantes libres que verifique (1.26) y las condiciones de borde, podremos asegurar que es la solución buscada. Para cierto tipo de secciones simples o múltiplemente conexas, alguna de las cuales resolveremos, el problema puede ser algo engorroso, la intuición juega un papel determinante y es factible que la prueba y error conduzca a la solución buscada para las tensiones tangenciales. En el trabajo se resuelven diversos ejemplos. También se

presentan algunas soluciones homogéneas para ambas tensiones tangenciales que generalmente se adaptan a nuestros ejemplos.

En definitiva por el momento aceptamos conocidas las expresiones de  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  que satisfacen la ecuación (1.26) y las siguientes Condiciones de Borde o de Reciprocidad para las tensiones tangenciales perpendiculares a los contornos.

$$\tau_n|_{(\mathcal{C})} = \tau_n|_{(\mathcal{C}_1)} = \tau_n|_{(\mathcal{C}_2)} = \dots = 0 \quad (1.27)$$

es decir

$$\tau_n|_{(\mathcal{C})} = \tau_{xy} \cdot n_2 + \tau_{xz} \cdot n_3|_{(\mathcal{C})} = \dots = 0 \quad (1.28)$$

donde  $(\mathcal{C})$ ,  $(\mathcal{C}_1)$ ,  $(\mathcal{C}_2)$ ,...son los contornos de la sección bajo estudio y de los eventuales huecos de la misma (Ver Figura 1).

Genéricamente escribimos que

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= f(y_G, z) \cdot Q & (a) \\ \tau_{xz} &= g(y_G, z) \cdot Q & (b) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Por lo dicho y desde ahora  $f(y_G, z)$  y  $g(y_G, z)$  son funciones conocidas.

Se cumplirá idénticamente que:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega &= Q & (a) \\ \iint_{\Omega} f(y_G, z) d\Omega &= 1 & (b) \\ \iint_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega &= 0 & (c) \\ \iint_{\Omega} g(y_G, z) d\Omega &= 0 & (d) \end{aligned} \quad (1.30)$$

La expresión (1.30a) por razones de equilibrio y la (1.30c) por la condición de simetría siguiente:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y_G, z) &= \tau_{xy}(y_G, -z) & (a) \\ \tau_{xz}(y_G, z) &= -\tau_{xz}(y_G, -z) & (b) \end{aligned} \quad (1.31)$$

### 1.3.1. ENERGÍA DE DEFORMACIÓN.

Para hallar la expresión del esfuerzo de corte " $Q$ " en función del campo de desplazamientos y sus derivadas, y del factor de corte " $m$ " planteamos la energía elástica de deformación complementaria que vale [18]:

$$2W = \iiint \frac{\sigma^2}{E(y_G, z)} d\mathcal{V} + \iiint \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{G(y_G, z)} d\mathcal{V} \quad (1.32)$$

donde  $d\mathcal{V} = dx d\Omega$  es el elemento de volumen.

Teniendo en cuenta las expresiones (1.1), (1.9), (1.22) de " $\sigma$ " y (1.29) para " $\tau_{xy}$ " y " $\tau_{xz}$ ", la expresión (1.32) puede escribirse como:

$$2W = \int \left( \frac{N^2}{E_0 A^\infty} + \frac{M_D^2}{E_0 J^\infty} + \frac{m Q^2}{G_0 A^\infty} \right) dx \quad (1.33)$$

donde hemos introducido el factor de corte " $m$ " como:

$$m \equiv A^\infty \iint_{\Omega} \frac{f^2(y_G, z) + g^2(y_G, z)}{\varphi_2(y_G, z)} d\Omega \quad (1.34)$$

Obsérvese la dependencia adicional del factor de corte de la variación funcional en la sección del módulo de elasticidad transversal y por supuesto de las tensiones tangenciales.

Para encontrar la relación constitutiva de " $Q$ " expresamos la energía " $W$ " por medio de la definición clásica del trabajo de deformación:

$$2W = \iiint \sigma \cdot \varepsilon d\mathcal{V} + \iiint (\tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz}) d\mathcal{V} \quad (1.35)$$

Tomando en consideración las ecuaciones previas podemos escribir la (1.35) como (recordando que  $\gamma_{xz} \equiv 0$  por hipótesis):

$$2W = \int \left( \frac{N^2}{E_0 A^\infty} + \frac{M_D^2}{E_0 J^\infty} \right) dx + \iiint \tau_{xy} \cdot \gamma d\mathcal{V} \quad (1.36)$$

Comparándola con la (1.33) deducimos que debe cumplirse:

$$\frac{m}{G_0 A^\infty} \int Q^2 dx = \iiint \tau_{xy} \cdot \gamma d\mathcal{V} \quad (1.37)$$

Puesto que " $\gamma$ " (exp. 1.5b) es función espacial exclusiva de " $x$ " y " $\tau_{xy}$ " solo de  $(y_G, z)$  y observando la (1.30a), la expresión (1.37) da lugar a:

$$\frac{m}{G_0 A^\infty} Q^2 = Q(\theta + v') \quad (1.38)$$

o sea

$$Q = \frac{G_0 A^\infty}{m} (\theta + v') \quad (1.39)$$

Esta expresión que justificamos y deducimos coincide formalmente con la utilizada para barras rectas homogéneas (Vigas Timoshenko), considerando los valores correspondientes del factor de corte " $m$ " y de " $A^\infty$ " dados por las expresiones (1.34) y (1.20) respectivamente (Ver también APÉNDICE 7).

#### 1.4 ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y C.B. PARA BARRAS RECTAS GRUESAS.

Expresemos " $W$ " en función del campo de desplazamientos, reemplazando en la ecuación (1.33) las relaciones constitutivas (1.21) y (1.39):

$$2W = \int [E_0(\alpha_0^\infty u'^2 + \alpha_2^\infty \theta'^2) + \frac{G_0 A^\infty}{m}(\theta + v')^2] dx \quad (1.40)$$

Por otro lado la energía cinética " $K$ " vale en general:  $\left( \dot{(\cdot)} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}, \dots \right)$

$$2K = \iiint (\dot{u}_p^2 + \dot{v}_p^2 + \dot{w}_p^2) \rho(y_G, z) dV \quad (1.41)$$

De acuerdo a las imposiciones (1.1) y (1.3) la expresamos como:

$$2K = \rho_0 \iiint [(\dot{u} + \dot{\theta} y)^2 + \dot{v}^2] \varphi_3(y_G, z) dV \quad (1.42)$$

Es cómodo introducir los siguientes parámetros que dependen de la distribución funcional de la densidad en cada sección:

$$\beta_j^\infty \equiv \int_{-h_s}^{h_i} \mu^\infty(y_G) \cdot y^j dy_G \quad (j=0, 1, 2) \quad (1.43)$$

donde

$$\mu^\infty(y_G) \equiv \int_{-\frac{b(y_G)}{2}}^{\frac{b(y_G)}{2}} \varphi_3(y_G, z) dz \quad (1.44)$$

Siendo  $\mu^\infty(y_G)$  esencialmente positivo se desprende que  $\beta_0^\infty > 0$ , y  $\beta_2^\infty > 0$ .

NOTA 1.4: Si  $\varphi_1(y_G, z) = \varphi_3(y_G, z) = 1$ , se verifica que  $\alpha_0^\infty = \beta_0^\infty$ ,  $\alpha_1^\infty = \beta_1^\infty = 0$ ,  $\alpha_2^\infty = \beta_2^\infty$ .

Por lo dicho entonces

$$2K = \rho_0 \int [\beta_0^\infty (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + 2\beta_1^\infty \dot{u} \dot{\theta} + \beta_2^\infty \dot{\theta}^2] dx \quad (1.45)$$

El último aporte energético que consideraremos es el de la energía " $P$ " potencial o de posición de las cargas distribuidas aplicadas:

$$P = -\int (p_x u + p_y v + p_\theta \theta) d\alpha \quad (1.46)$$

donde (ver figura 1) " $p_x$ ", " $p_y$ " y " $p_\theta$ " son respectivamente las fuerzas axial, transversal y momento distribuido reducidos al eje neutro.

Cabe consignar que podrían haberse tomado en consideración eventuales energías de deformación debidas a una vinculación elástica y de las cargas concentradas en los extremos y que por razones de simplicidad no incluimos en el presente estudio.

Aplicando por ejemplo los pasos requeridos por el Teorema de Hamilton [5] llegamos al siguiente sistema diferencial lineal a coeficientes constantes en sentido  $u$ ,  $v$  y  $\theta$  respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{11}^\infty u'' - (D_{11}^\infty \ddot{u} + D_{22}^\infty \ddot{\theta}) &= -p_x & (a) \\ \mathcal{C}_{33}^\infty v'' + \mathcal{C}_{33}^\infty \theta' - D_{11}^\infty \ddot{v} &= -p_y & (b) \\ \mathcal{C}_{22}^\infty \theta'' - \mathcal{C}_{33}^\infty (v' + \theta) - (D_{22}^\infty \ddot{u} + D_{33}^\infty \ddot{\theta}) &= -p_\theta & (c) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Utilizando las relaciones constitutivas para los esfuerzos característicos, el sistema diferencial (1.47) que gobierna el movimiento de las barras rectas gruesas, también puede presentarse como:

$$\begin{aligned} N' - (D_{11}^\infty \ddot{u} + D_{22}^\infty \ddot{\theta}) &= -p_x & (a) \\ Q' - D_{11}^\infty \ddot{v} &= -p_y & (b) \\ M_D' - Q - (D_{22}^\infty \ddot{u} + D_{33}^\infty \ddot{\theta}) &= -p_\theta & (c) \end{aligned} \quad (1.48)$$

donde hemos indicado como:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{11}^\infty &\equiv E_0 \alpha_0^\infty ; \quad \mathcal{C}_{22}^\infty \equiv E_0 \alpha_2^\infty ; \quad \mathcal{C}_{33}^\infty \equiv \frac{G_0 \alpha_0^\infty}{m} \\ D_{11}^\infty &\equiv \rho_0 \beta_0^\infty ; \quad D_{22}^\infty \equiv \rho_0 \beta_1^\infty ; \quad D_{33}^\infty \equiv \rho_0 \beta_2^\infty \end{aligned} \quad (1.49)$$

Las correspondientes C.B., si denominamos respectivamente como " $\mathcal{F}$ ", " $\mathcal{G}$ " y " $\mathcal{H}$ " a las variaciones admisibles de los corrimientos " $u$ ", " $v$ " y " $\theta$ " cuando aplicamos el cálculo de variaciones y valen:

$$\left| \mathcal{C}_{11}^\infty u' \mathcal{F} \right|_{x_0}^{x_L} + \left| \mathcal{C}_{33}^\infty (v' + \theta) \mathcal{G} \right|_{x_0}^{x_L} + \left| \mathcal{C}_{22}^\infty \theta' \mathcal{H} \right|_{x_0}^{x_L} = 0 \quad (1.50)$$

Pueden expresarse como la suma de los siguientes trabajos virtuales:

$$\left| N \mathcal{F} \right|_{x_0}^{x_L} + \left| Q \mathcal{G} \right|_{x_0}^{x_L} + \left| M_D \mathcal{H} \right|_{x_0}^{x_L} = 0 \quad (1.51)$$

Designamos por " $x_0$ " y " $x_L$ " a las coordenadas de los extremos de la barra bajo estudio. Recordemos, además, que si la vinculación a tierra de la pieza exige que " $u$ " y/o

" $v$ " y/o " $\theta$ " sean nulos o impuestos en el punto " $D$ ", correspondientemente lo serán " $\mathcal{F}$ " y/o " $\mathcal{G}$ " y/o " $\mathcal{H}$ ". Sin embargo es importante hacer notar que en no todos los casos las variaciones admisibles " $\mathcal{F}$ ", " $\mathcal{G}$ " y " $\mathcal{H}$ ", son independientes entre sí; dependiendo del tipo de vinculación, o en el caso de emplear vínculos elásticos, tendríamos una combinación de las variaciones. De esto, entonces, que genéricamente las C.B. las presentamos como una suma de trabajos virtuales que debe anularse en los extremos de la barra (por ejemplo ver Ref [16] y APÉNDICE 4).

*NOTA 1.5:* En el APÉNDICE 4 se muestra un caso particular para variaciones admisibles no independientes.

Otra importante novedad de este planteo reside en el *acople dinámico flexo-axial* que se observa en el sistema diferencial gobernante dado por (1.47) o (1.48) que no se presenta en barras rectas homogéneas (Vigas Timoshenko). En efecto. En este caso particular al ser  $\varphi_3(y_G, z) = 1$  entonces  $\mu^\infty(y_G) = b(y_G)$  y  $\beta_1^\infty \equiv \alpha_1^\infty = 0$ , con lo cual  $D_{22}^\infty = 0$ , y la ecuación de movimiento en sentido axial se disocia del sistema conformado por el giro flexional y el desplazamiento transversal.

Agreguemos que esta propiedad de un *acople flexo-axial* caracteriza también al problema dinámico de barras curvas gruesas, homogéneas o no, como veremos en detalle en la PARTE SEGUNDA del presente estudio.

## 1.5 VIBRACIONES NATURALES. CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD (CO).

Aceptamos modos armónicos de vibración para el sistema, o sea:

$$\{u, v, \theta\}(x, t) = \{u, v, \theta\}(x) e^{j\omega t} \quad (1.52)$$

donde " $\omega$ " es la frecuencia circular (radianes/segundo) y " $j \equiv \sqrt{-1}$ ". Reemplazando esta propuesta de separar variables en el sistema diferencial (1.47) sin cargas aplicadas se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{11}^\infty u'' + \omega^2 (D_{11}^\infty u + D_{22}^\infty \theta) &= 0 & (a) \\ -\mathcal{C}_{33}^\infty v'' - \mathcal{C}_{33}^\infty \theta' - \omega^2 D_{11}^\infty v &= 0 & (b) \\ \mathcal{C}_{22}^\infty \theta'' - \mathcal{C}_{33}^\infty (v' + \theta) + \omega^2 (D_{22}^\infty u + D_{33}^\infty \theta) &= 0 & (c) \end{aligned} \quad (1.53)$$

o bien en las (1.48)

$$\begin{aligned} N' + \omega^2 (D_{11}^\infty u + D_{22}^\infty \theta) &= 0 & (a) \\ Q' + \omega^2 D_{11}^\infty v &= 0 & (b) \\ M_D' - Q + \omega^2 (D_{22}^\infty u + D_{33}^\infty \theta) &= 0 & (c) \end{aligned} \quad (1.54)$$

En el APÉNDICE 5 se incluye el desarrollo de cómo el sistema (1.53) puede reducirse a una ecuación diferencial ordinaria de sexto orden en cualesquiera de las formas modales.

En estos sistemas " $N$ ", " $M_D$ ", " $Q$ ", " $u$ ", " $v$ " y " $\theta$ " son sólo funciones de " $x$ ", independientes del tiempo.

Considerando las relaciones (1.21) y (1.39) los sistemas diferenciales (1.53) y (1.54) dependen de las formas modales " $u(x)$ ", " $v(x)$ " y " $\theta(x)$ ". Se trata de un sistema diferencial ordinario en " $x$ " lineal a coeficientes constantes que da lugar a un típico problema de valores propios. Los autovalores son las frecuencias naturales circulares " $\omega_n$ " ( $n=1, 2, \dots$ ). Se hallan planteando, por ejemplo, el sistema (1.53), imponiendo la propuesta exponencial clásica " $u(x) = \mathcal{U} e^{\lambda x}$ ", " $v(x) = \mathcal{V} e^{\lambda x}$ " y " $\theta(x) = \mathcal{W} e^{\lambda x}$ ", con las C.B. (1.50) o (1.51) donde  $\lambda$  es una constante compleja en general; se llega a un sistema lineal homogéneo en las constantes  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$ . La condición de no trivialidad es una ecuación algebraica de sexto orden en  $\lambda$ . Las seis raíces (que dependen evidentemente de " $\omega$ ") nos permiten disponer de las tres formas modales en función de dieciocho constantes. Reemplazadas en dos ecuaciones cualesquiera del sistema (1.53) el número de constantes se reduce a sólo seis arbitrarias. Planteando las CB (1.50) (que son seis porque " $\mathcal{F}$ ", " $\mathcal{G}$ " y " $\mathcal{H}$ " son variaciones independientes cuando los apoyos no son elásticos) hallamos las infinitas (contables) frecuencias circulares " $\omega_n$ " ( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Correspondientemente a cada frecuencia  $n$ -ésima tenemos las autofunciones o formas modales  $n$ -ésimas " $u_n(x)$ ", " $v_n(x)$ " y " $\theta_n(x)$ ".

En el APÉNDICE 2 se deducen las tres CO entre formas modales para el presente problema de barras rectas gruesas.

## 1.6 VIBRACIÓN FORZADA EN BARRAS RECTAS. SUPERPOSICIÓN MODAL.

Observamos que los sistemas diferenciales (1.47) o (1.48) para el caso homogéneo, pueden atacarse utilizando separación de variables, que nos conduce a un sistema diferencial tipo "Sturm-Liouville". Consecuentemente, disponemos de la vía clásica que se conoce como *Superposición Modal* para resolver el movimiento (o vibración forzada) de barras rectas gruesas no homogéneas, bajo la acción de cargas espacio temporales arbitrarias.

En efecto. Halladas las frecuencias naturales " $\omega_n$ " y sus correspondientes formas modales " $u_n(x)$ ", " $v_n(x)$ " y " $\theta_n(x)$ " ( $n=1, 2, 3, \dots$ ), proponemos las siguientes combinaciones lineales en el tiempo:

$$\begin{aligned}
u &= u(x,t) = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^\infty(t) u_n(x) & (a) \\
v &= v(x,t) = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^\infty(t) v_n(x) & (b) \\
\theta &= \theta(x,t) = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^\infty(t) \theta_n(x) & (c)
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Es básico que la combinación de las tres componentes cinemáticas se efectúe con las mismas funciones del tiempo que hemos denominado " $Y_n^\infty(t)$ ".

De acuerdo a las ecuaciones (1.21), (1.39) y (A2.5), también tenemos (considerando (1.55)):

$$\begin{aligned}
N &= N(x,t) = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^\infty(t) N_n(x) & (a) \\
M_D &= M_D(x,t) = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^\infty(t) M_{Dn}(x) & (b) \\
Q &= Q(x,t) = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^\infty(t) Q_n(x) & (c)
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Debido a las asunciones (1.55) y (1.56) surgen como respuesta dinámica de nuestro problema, unas funciones de espacio y tiempo que satisfacen las C.B. y los sistemas homogéneos (1.53) o (1.54), ya que cada modo  $n$ -ésimo cumple con estas condiciones.

Nos resta satisfacer el sistema dinámico dado por (1.47) o (1.48) y garantizar las *Condiciones Iniciales* (CI) del planteo, que expresamos para algún  $t = t_0$  y que nosotros sin perder generalidad tomamos como  $t_0 = 0$ , como:

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= U_0(x) & (a) & \quad ; \quad \dot{u}(x,0) = U_1(x) & (d) \\
v(x,0) &= V_0(x) & (b) & \quad ; \quad \dot{v}(x,0) = V_1(x) & (e) \\
\theta(x,0) &= \Theta_0(x) & (c) & \quad ; \quad \dot{\theta}(x,0) = \Theta_1(x) & (f)
\end{aligned} \tag{1.57}$$

donde  $U_0(x)$ ,  $V_0(x)$ ,  $\Theta_0(x)$ ,  $U_1(x)$ ,  $V_1(x)$  y  $\Theta_1(x)$  son funciones espaciales datos del problema, que satisfacen las CB.

Es sencillo, entonces, hallar los valores iniciales de las funciones " $Y_n^\infty(t)$ " ( $n = 1, 2, \dots$ ). Es decir reemplazamos las expresiones (1.57) en las ecuaciones (1.55) y sus derivadas temporales y obtenemos:



$$\begin{aligned} \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^\infty(0) u_n(x) &= U_0(x) \quad (a) ; \quad \sum_{n=1,2,\dots} \dot{Y}_n^\infty(0) u_n(x) = U_1(x) \quad (d) \\ \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^\infty(0) v_n(x) &= V_0(x) \quad (b) ; \quad \sum_{n=1,2,\dots} \dot{Y}_n^\infty(0) v_n(x) = V_1(x) \quad (e) \\ \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^\infty(0) \theta_n(x) &= \Theta_0(x) \quad (c) ; \quad \sum_{n=1,2,\dots} \dot{Y}_n^\infty(0) \theta_n(x) = \Theta_1(x) \quad (f) \end{aligned} \quad (1.58)$$

Por  $\dot{(\bullet)}(x,0)$  y  $\dot{Y}_n^\infty(0)$  entendemos respectivamente  $\left. \frac{\partial(\bullet)}{\partial t}(x,t) \right|_{t=0}$  y  $\left. \frac{dY_n^\infty(t)}{dt} \right|_{t=0}$  ( $n=1, 2, \dots$ ).

Para conocer los valores de cada  $Y_n^\infty(0)$  y cada  $\dot{Y}_n^\infty(0)$ , efectuamos simbólicamente las dos sumas m. a m. e integración siguientes:

$$\int_{(x_T)} \left\{ D_{11}^\infty [(1.58a)u_i + (1.58b)v_i] + D_{33}^\infty (1.58c)\theta_i + D_{22}^\infty [(1.58a)\theta_i + (1.58c)u_i] \right\} dx \quad (1.59)$$

y además

$$\int_{(x_T)} \left\{ D_{11}^\infty [(1.58d)u_i + (1.58e)v_i] + D_{33}^\infty (1.58f)\theta_i + D_{22}^\infty [(1.58d)\theta_i + (1.58f)u_i] \right\} dx \quad (1.60)$$

Considerando la primera CO (A2.4), obtenemos con (1.59) y (1.60) respectivamente que:

$$Y_i^\infty(0) = \frac{1}{\|\mathcal{N}_i\|} \int_{(x_T)} \left[ D_{11}^\infty (U_0 u_i + V_0 v_i) + D_{22}^\infty (U_0 \theta_i + \Theta_0 u_i) + D_{33}^\infty \Theta_0 \theta_i \right] dx \quad (i=1, 2, \dots) \quad (1.61)$$

$$\dot{Y}_i^\infty(0) = \frac{1}{\|\mathcal{N}_i\|} \int_{(x_T)} \left[ D_{11}^\infty (U_1 u_i + V_1 v_i) + D_{22}^\infty (U_1 \theta_i + \Theta_1 u_i) + D_{33}^\infty \Theta_1 \theta_i \right] dx \quad (i=1, 2, \dots) \quad (1.62)$$

Como veremos a continuación, las funciones  $Y_n^\infty(t)$  provendrán de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden y por ello se requerirán exclusivamente los valores iniciales  $Y_n^\infty(0)$  y  $\dot{Y}_n^\infty(0)$ .

Entonces, reemplacemos las propuestas (1.55) y (1.56) en el sistema (1.48) de vibración forzada. Obtenemos así que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,2,\dots} \left\{ Y_n^\infty(t) \dot{N}_n'(x) - \ddot{Y}_n^\infty(t) \left[ D_{11}^\infty u_n(x) + D_{22}^\infty \theta_n(x) \right] \right\} &= -p_x(x,t) \quad (a) \\ \sum_{n=1,2,\dots} \left\{ Y_n^\infty(t) \dot{Q}_n'(x) - \ddot{Y}_n^\infty(t) D_{11}^\infty v_n(x) \right\} &= -p_y(x,t) \quad (b) \\ \sum_{n=1,2,\dots} \left\{ Y_n^\infty(t) \left[ M_{D_n}'(x) - Q_n(x) \right] - \ddot{Y}_n^\infty(t) \left[ D_{22}^\infty u_n(x) + D_{33}^\infty \theta_n(x) \right] \right\} &= -p_\theta(x,t) \quad (c) \end{aligned} \quad (1.63)$$

Efectuando simbólicamente la suma m. a m. y la integración indicada a continuación:

$$\int_{(x_T)} [(1.63a)u_i + (1.63b)v_i + (1.63c)\theta_i] dx \quad (1.64)$$

para todo subíndice "i", teniendo en cuenta las CO (A2.4) y (A2.7) y la primera y tercera expresión (A2.8) de la norma  $\|\mathcal{N}_i\|$ , obtenemos el siguiente sistema diferencial ordinario infinito (y diagonal) para hallar cada  $Y_i^\infty(t)$  ( $i=1, 2, \dots$ )

$$\ddot{Y}_i^\infty(t) + \omega_i^2 Y_i^\infty(t) = \phi_i(t) \quad ; \quad (i=1, 2, \dots) \quad (1.65)$$

Hemos denominado por simplificación de nomenclatura como:

$$\phi_i(t) = \int_{x_T} [p_x(x, t)u_i(x) + p_y(x, t)v_i(x) + p_\theta(x, t)\theta_i(x)] dx \quad ; \quad (i=1, 2, \dots) \quad (1.66)$$

que son funciones conocidas del tiempo.

La solución para cada  $Y_i^\infty(t)$  es la suma de una solución homogénea (con  $\phi_i(t) \equiv 0$ )  $Y_{i_H}^\infty(t)$ , más una particular  $Y_{i_0}^\infty(t)$  que depende de  $\phi_i(t)$ ; o sea:

$$Y_i^\infty(t) = Y_{i_H}^\infty(t) + Y_{i_0}^\infty(t) \quad \forall i \quad (1.67)$$

Evidentemente tenemos que:

$$Y_{i_H}^\infty(t) = a_i^\infty \sin \omega_i t + b_i^\infty \cos \omega_i t \quad \forall i \quad (1.68)$$

donde " $a_i^\infty$ " y " $b_i^\infty$ " son constantes que se fijan en base a las CI.

Como sabemos disponemos de infinitas posibilidades para las soluciones particulares, y teóricamente, siempre es posible determinarlas con  $\phi_i(t)$  y las básicas de (1.68), (recordar definición del Wronskiano). En definitiva de acuerdo a las CI será:

$$a_i^\infty = \frac{1}{\omega_i} [\dot{Y}_i^\infty(0) - \dot{Y}_{i_0}^\infty(0)] \quad (a) \quad \forall i \quad (1.69)$$

$$b_i^\infty = Y_i^\infty(0) - Y_{i_0}^\infty(0) \quad (b)$$

Los valores i-ésimos  $Y_i^\infty(0)$  y  $\dot{Y}_i^\infty(0)$  los obtuvimos en (1.61) y (1.62).

De esta manera hemos concluido el problema de movimiento o de vibración forzada de una barra recta gruesa por el método clásico de superposición modal. O sea: conocidas las  $Y_n^\infty(t)$  y las formas modales " $u_n(x)$ ", " $v_n(x)$ " y " $\theta_n(x)$ " ( $n=1, 2, \dots$ ) las ecuaciones (1.55) y (1.56) nos brindan la respuesta dinámica buscada.



## PARTE SEGUNDA BARRAS CURVAS GRUESAS

### 2. PRESENTACIÓN DEL MODELO

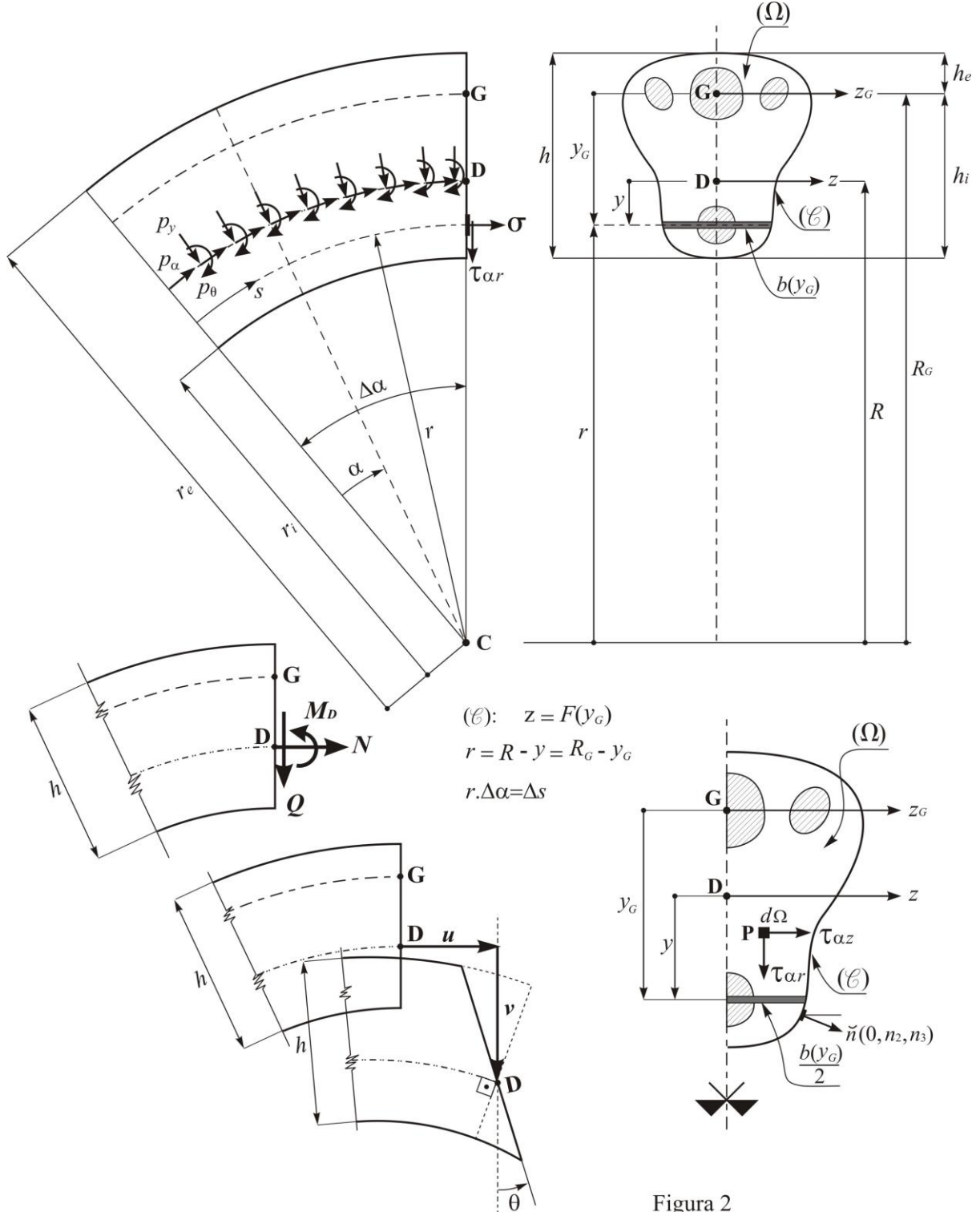


Figura 2

## 2.1. HIPÓTESIS, DEFINICIONES Y PROPIEDADES (FIGURA 2)

En la figura se muestra un elemento estructural genérico. Dos puntos especiales deben tenerse en cuenta: el centroide " $G$ " (baricentro geométrico) y el punto " $D$ " por donde pasará el eje neutro " $z$ " una vez definida la condición correspondiente para su ubicación. La sección en general múltiplemente conexas, tiene al menos un eje de simetría que coincide con el plano de movimiento. Las fronteras ( $\mathcal{C}$ ):  $z = F(y_G)$  que encierran al dominio de interés y/o a los huecos, deben estar definidas por funciones aunque no necesariamente biyectivas ni analíticas.

Trabajaremos dentro de la RM. Las inhomogeneidades consideradas en este trabajo sólo se presentan en cada sección plana transversal pero son invariables con la coordenada espacial " $\alpha$ ".

Entonces si  $E = E(y_G, z)$ ,  $G = G(y_G, z)$  y  $\rho = \rho(y_G, z)$  son respectivamente el módulo elástico o de Young, el módulo de elasticidad transversal o de corte y la densidad, imponemos que

$$\begin{aligned} E &= E(y_G, z) = E_0 \cdot \varphi_1(y_G, z) \quad (a) \\ G &= G(y_G, z) = G_0 \cdot \varphi_2(y_G, z) \quad (b) \\ \rho &= \rho(y_G, z) = \rho_0 \cdot \varphi_3(y_G, z) \quad (c) \end{aligned} \quad (2.1)$$

siendo  $E_0$ ,  $G_0$  y  $\rho_0$  valores arbitrarios de referencia. Por la simetría adoptada se verifica que

$$\varphi_j(y_G, z) = \varphi_j(y_G, -z) ; \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

Observemos adicionalmente que las funciones  $\varphi_j(y_G, z)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) no dependen de la curvatura de la pieza ni son necesariamente analíticas.

El campo de desplazamientos (componentes del vector desplazamiento) adoptado para un punto genérico " $P$ " de la barra curva de coordenadas  $(\alpha, y_G, z)$  será [1]:

$$\begin{aligned} u_P &= \underline{u}(\alpha, y_G, t) = u(\alpha, t) + \theta(\alpha, t) \cdot (R - r) \quad (a) \\ v_P &= \underline{v}(\alpha, y_G, t) = v(\alpha, t) \quad (b) \\ w_P &= \underline{w}(\alpha, y_G, t) = 0 \quad (c) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Recordemos que  $R - r = R - R_G + y_G$ .

Por " $t$ " indicamos la coordenada temporal y a su vez como  $u = u(\alpha, t)$  al desplazamiento tangencial en " $D$ ", como  $v = v(\alpha, t)$  al desplazamiento transversal en sentido de " $y$ " en " $D$ " (en realidad por hipótesis 2 de la INTRODUCCIÓN es único para toda la sección) y  $\theta = \theta(\alpha, t)$  al

giro flexional alrededor del eje "z" pasante por "D" que en general no coincidirá con el giro del eje. O sea estamos considerando aportes axiales, flexionales y por corte.

Entonces, dentro de la RM, las únicas componentes del tensor lineal de deformación en coordenadas polares calculadas a través de las relaciones cinemáticas valen para el punto típico "P":

$$\begin{aligned}\varepsilon = \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_P}{\partial \alpha} - \frac{v_P}{r} & (a) \\ \gamma = \gamma_{\alpha r} = \gamma_{r\alpha} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_P}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_P}{\partial r} + \frac{u_P}{r} & (b) \\ \gamma_{\alpha z} = \gamma_{z\alpha} &= 0 & (c)\end{aligned}\tag{2.4}$$

De acuerdo a las expresiones (2.3) e introduciendo al acento para indicar derivadas respecto de "α"  $\left( (\cdot)' \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha} \right)$  tendremos que:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{r} \cdot [u' - v + \theta'(R - r)] & (a) \\ \gamma &= \frac{1}{r} \cdot [u + v' + R\theta] & (b)\end{aligned}\tag{2.5}$$

La convención de signos adoptada es la siguiente:  $\varepsilon > 0$  cuando las fibras se alargan y  $\gamma > 0$  cuando el ángulo entre las fibras radial y tangencial se incrementa (esto es debido a la convención de signo adoptada para  $\theta$ ).

De acuerdo a la Ley de Hooke al aceptarse por hipótesis que  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  son nulas, las componentes de tensión valdrían:

$$\begin{aligned}\sigma = \sigma_\alpha &= E(y_G, z) \cdot \varepsilon = E_0 \cdot \varphi_1(y_G, z) \cdot \varepsilon & (a) \\ \tau = \tau_{\alpha r} = \tau_{r\alpha} &= G(y_G, z) \cdot \gamma = G_0 \cdot \varphi_2(y_G, z) \cdot \gamma & (b)\end{aligned}\tag{2.6}$$

Como sabemos la expresión constitutiva (2.6b) no se considera dentro de la aproximación que nos ocupa. Por ahora tampoco tenemos forma de hallar " $\tau_{\alpha z}$ " que en general no es nula.

La convención que aceptamos para las tensiones tangenciales " $\tau_{\alpha r}$ " y " $\tau_{\alpha z}$ " son positivas cuando actuando sobre un elemento de área de la sección con normal saliente positiva ( $\alpha$  creciente), tienen respectivamente las direcciones de las coordenadas "y" y "z". En cuanto a la tensión normal " $\sigma$ " es positiva cuando actuando sobre un elemento de área de la sección con normal saliente positiva tiene igual dirección (tracción).

## 2.2. ESFUERZO AXIAL Y MOMENTO FLECTOR. UBICACIÓN DEL ORIGEN "yz"

Para simplificar el proceso algebraico es conveniente ubicar el eje neutro "z" que pasa por el punto "D" bajo una clásica condición que indicamos a continuación.

Sean "N" y " $M_D$ " el esfuerzo axial y el momento flector reducido al eje neutro definidos como:

$$N = \iint_{\Omega} \sigma d\Omega \quad ; \quad M_D = \iint_{\Omega} \sigma \cdot y d\Omega \quad (2.7)$$

siendo  $\Omega$  el área de la sección y  $d\Omega$  un elemento de área que vale:

$$d\Omega = dy dz = dy_G dz = -dr dz = b(y_G) dy_G \quad (2.8)$$

Donde sabemos que " $y = R - r$ ", " $y_G = R_G - r$ ", " $R_G - y_G > 0$ ".

Introducimos

$$\alpha_j^R \equiv \int_{-h_e}^{h_i} \frac{\lambda^R(y_G) \cdot y^j}{R_G - y_G} dy_G \quad (j = 0, 1, 2) \quad (2.9)$$

donde definimos "ancho material" como:

$$\lambda^R(y_G) \equiv \int_{-\frac{b(y_G)}{2}}^{\frac{b(y_G)}{2}} \varphi_1(y_G, z) dz \quad (2.10)$$

Obsérvese que en realidad  $\lambda^R(y_G) \equiv \lambda^\infty(y_G)$  ya que las definiciones dadas por (1.10) y (2.10) son idénticas.

Siendo por definición " $\lambda^R(y_G) > 0$ " se verifica que " $\alpha_0^R > 0$  y  $\alpha_2^R > 0$ ".

Si el material tiene Módulo de Young homogéneo, entonces  $\varphi_1(y_G, z) = 1$  y  $\lambda^R(y_G) = b(y_G)$ .

Las expresiones (2.7) de acuerdo a (2.5a), (2.6a) y (2.9) se reescriben como:

$$N = E_0 [\alpha_0^R (u' - v) + \alpha_1^R \theta'] \quad (a) \quad (2.11)$$

$$M_D = E_0 [\alpha_1^R (u' - v) + \alpha_2^R \theta'] \quad (b)$$

Para  $N \neq 0$  y  $M_D \neq 0$  el eje paralelo al "z" donde  $\varepsilon = \sigma = 0$  pasa a una distancia " $y = R - r = a$ " del eje "z" que vale como puede inferirse de (2.5a):

$$a = -\frac{u' - v}{\theta'} \quad (2.12)$$

o todavía por (2.11) como:

$$a = \frac{\alpha_2^R N - \alpha_1^R M_D}{\alpha_1^R N - \alpha_0^R M_D} \quad (2.13)$$

Hemos definido el eje neutro general para el caso de flexión compuesta. Es tradicional, sin embargo (recordar la definición para barras rectas), denominar al eje neutro como aquel

eje "z" donde  $\varepsilon = \sigma = 0$  cuando  $N = 0$ . Fijamos entonces el origen "D" bajo la condición siguiente:

$$a = 0 \quad \text{cuando} \quad N = 0 \quad (2.14)$$

Por (2.13) deducimos que debe ser

$$\alpha_1^R = 0 \quad (2.15)$$

*NOTA 2.1:* La condición (2.15) es una extensión natural de la teoría de barras rectas homogéneas (en cuyo caso el eje neutro es baricéntrico y el momento estático de los elementos de área de la sección respecto de dicho eje es nulo).

Si definimos como

$$L_i \equiv \int_{-h_e}^{h_i} (R_G - y_G)^i \lambda^R(y_G) dy_G \quad ; \quad (i=0,1) \quad (2.16)$$

obteniendo  $\alpha_0^R$  (ver ecuación (2.9)) por integración directa como

$$\alpha_0^R \equiv \int_{-h_e}^{h_i} \frac{\lambda^R(y_G)}{R_G - y_G} dy_G \quad (2.17)$$

vemos que debido a (2.15) (y recordando (1.17)):

$$R = \frac{L_0}{\alpha_0^R} = \frac{\alpha_0^\infty}{\alpha_0^R} \quad (2.18)$$

que denominaremos como "radio neutro  $R$ " (ver figura 2).

A su vez teniendo en cuenta (2.18) (y recordando (1.18) del capítulo de barras rectas gruesas) observamos que

$$\alpha_2^R = L_1 - R^2 \alpha_0^R = L_1 - R L_0 = \alpha_0^\infty [R_G - (R + \Delta)] \quad (2.19)$$

Introducimos los dos coeficientes siguientes:

$$A^R \equiv R \alpha_0^R = L_0 = \alpha_0^\infty = A^\infty \quad ; \quad J^R \equiv R \alpha_2^R \quad (2.20)$$

Denominamos a " $A^R = A^\infty$ " como área material y a " $J^R$ " como momento de inercia material de la sección correspondiente a una barra curva gruesa. De esta manera hemos obtenido las expresiones constitutivas de " $N$ " y " $M_D$ " (ver exp. (2.11), (2.15) y (2.20)):

$$\begin{aligned} N &= \frac{E_0 A^R}{R} (u' - v) & (a) \\ M_D &= \frac{E_0 J^R}{R} \theta' & (b) \end{aligned} \quad (2.21)$$

y entonces, por (2.5), (2.6a) y (2.21) escribimos que:



$$\sigma = \varphi_1(y_G, z) \cdot \frac{R}{r} \cdot \left( \frac{N}{A^R} + \frac{M_D}{J^R} y \right) \quad (2.22)$$

con claras similitudes con la expresión de  $\sigma$  para barras rectas.

### 2.2.1. CASO DE $E(y_G, z) = E_0$ CONSTANTE ( $\varphi_1(y_G, z) = 1$ )

Agregamos sólo con carácter ilustrativo lo siguiente. Si  $\varphi_1(y_G, z) = 1$  –módulo de elasticidad constante– y por definición de centroide se cumple que

$$\iint_{\Omega} y_G d\Omega = \iint_{\Omega} (R_G - r) d\Omega = 0 \quad (2.23)$$

tendremos (recordar exp.(2.10) y (2.16))  $\lambda^R(y_G) = b(y_G)$ ,  $L_0 = \Omega$  y  $L_1 = R_G \Omega$  por lo cual de acuerdo a las expresiones (2.18), (2.19), y (2.20),  $R = \frac{\Omega}{\alpha_0^R}$ ,  $A^R = \Omega$ ,  $\alpha_2^R = (R_G - R)\Omega$  y  $J^R = R(R_G - R)\Omega$ . Todavía, siempre para  $\varphi_1(y_G, z) = 1$ , si  $R_G \rightarrow \infty$  (caso de barras rectas o curvas delgadas. Ver APÉNDICE 6) entonces  $R \rightarrow R_G$  y no es difícil inferir que  $J^R \rightarrow J_G$  donde  $J_G$  es el momento de inercia baricéntrico de la sección (momento de inercia respecto del eje  $z_G$ ).

### 2.3. EXPRESIÓN DEL ESFUERZO DE CORTE. FACTOR DE CORTE.

Como dijimos la expresión (2.6b) no se utiliza porque no satisface las condiciones de equilibrio local ni la compatibilidad de deformación pues proviene de una fuerte hipótesis (aunque muy buena) de la RM, y que es la imposición del mantenimiento de secciones planas durante la deformación. Recurrimos entonces a buscar las expresiones de las componentes  $\tau_{\alpha r}$  y  $\tau_{\alpha z}$  (ésta desde ya no aparecía siquiera constitutivamente) del tensor de tensiones en coordenadas polares, por medio de la ecuación de equilibrio interno en sentido de la tangente al eje curvo. Esta vía nos conducirá, además, a hallar la expresión constitutiva del esfuerzo de corte  $Q \equiv Q_y$ .

*NOTA 2.2: En barras rectas homogéneas y en la bibliografía clásica, las tensiones tangenciales similares se encuentran por la fórmulas conocidas como de Collignon o de Jouravsky. O como hacemos en la PARTE PRIMERA pueden hallarse planteando la ecuación de equilibrio interno en sentido del eje de la barra recta.*

Ahora bien. Continuando con barras curvas gruesas recordemos la ecuación estática de equilibrio interno en sentido tangencial al eje en coordenadas polares y en ausencia de fuerzas de volumen (ver por ejemplo las referencias [17] ó [18]):

$$r \cdot \left( \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} \right) - 2\tau_{\alpha r} + \sigma' = 0 \quad (2.24)$$

En el APÉNDICE 1 tenemos las expresiones de equilibrio estático entre esfuerzos característicos axial, momento flector y esfuerzo de corte (ver también APÉNDICE 8). Derivando la expresión (2.22) respecto a la variable  $\alpha$  obtenemos (observando las expresiones (2.19) y (2.20)):

$$\begin{aligned} \sigma' &= \varphi_1(y_G, z) \cdot \left( \frac{U}{r} + V \right) \cdot Q \quad (a) \\ V &\equiv -\frac{R^2}{J^R} ; \quad U = -V \left( R + \frac{J^R}{A^R R} \right) = -V(R_G - \Delta) \quad (b) \end{aligned} \quad (2.25)$$

entonces la ecuación de equilibrio (2.24) valdrá:

$$r \cdot \left( \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} \right) - 2\tau_{\alpha r} = -\varphi_1(y_G, z) \cdot \left( \frac{U}{r} + V \right) \cdot Q \quad (2.26)$$

NOTA 2.3: Para el caso  $\varphi_1(y_G, z) = 1$ , es decir Módulo de Elasticidad constante, de acuerdo a la sección 2.2.1, encontramos que  $U = -V R_G = \frac{R^2 R_G}{J^R}$ .

Ahora bien la solución de la ecuación diferencial (2.24) (ó (2.26)) es en general teóricamente imposible. Baste pensar que tenemos dos funciones incógnitas y una sola ecuación diferencial a derivadas parciales. Para ciertas  $\varphi_1(y_G, z)$  y algunos dominios de integración, será posible hallar una solución viable. Es decir aceptando que la misma existe y es única, hallando una solución de prueba sin constantes libres que verifique (2.24) y las condiciones de borde, podremos asegurar que es la solución buscada. De todos modos propondremos algunas ideas empíricas para hallar las expresiones de  $\tau_{\alpha r}$  y  $\tau_{\alpha z}$ .

Para secciones simples o múltiplemente conexas con materiales funcionales, alguna de las cuales resolveremos, el problema puede no ser directo; la intuición juega un papel determinante y la prueba y error permitirá posiblemente hallar la solución buscada para las tensiones tangenciales. En la PARTE CUARTA del presente desarrollo, se resuelven diversos ejemplos.

Por el momento supongamos que conocemos las expresiones de  $\tau_{\alpha r}$  y  $\tau_{\alpha z}$  que satisfacen (2.26) con las CB para la sección y la  $\varphi_1(y_G, z)$  asumidas que expresamos como:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha r} &= f(y_G, z) \cdot Q \quad (a) \\ \tau_{\alpha z} &= g(y_G, z) \cdot Q \quad (b) \end{aligned} \quad (2.27)$$

La finalidad del presente desarrollo consiste en hallar las expresiones de  $f(y_G, z)$  y  $g(y_G, z)$ . Con ellas conocidas el problema está resuelto. Digamos que  $\tau_{\alpha r}(y_G, z)$  y  $\tau_{\alpha z}(y_G, z)$  satisfacen la ecuación diferencial de equilibrio (2.24) y las condiciones de reciprocidad sobre los contornos externos, internos (y aún sobre los comunes cuando por ejemplo  $E(y_G, z)$  varía “a saltos”). Denominando genéricamente como  $\tau_{\alpha n}$  a la tensión tangencial de dirección coincidente con el versor normal a cada contorno, será:

$$\tau_{\alpha n}|_{(\ell)} = \tau_{\alpha n}|_{(\ell_1)} = \tau_{\alpha n}|_{(\ell_2)} = \dots = 0 \quad (2.28)$$

Debido al carácter tensorial del campo tensional se cumple que:

$$\tau_{\alpha n}|_{(\ell)} = \tau_{\alpha r} \cdot n_2 + \tau_{\alpha z} \cdot n_3|_{(\ell)} = \dots = 0 \quad (2.29)$$

donde  $\tilde{n}$  es el versor normal saliente en cada frontera de componentes  $(0, n_2, n_3)$  según las coordenadas  $(\alpha, y_G, z)$ . De esta manera se cumple

$$\iint_{\Omega} \tau_{\alpha r} d\Omega = Q \quad \left( \Rightarrow \iint_{\Omega} f(y_G, z) d\Omega = 1 \right) \quad (2.30)$$

Como por cuestiones de simetría

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha r}(y_G, z) &= \tau_{\alpha r}(y_G, -z) \quad (a) \\ \tau_{\alpha z}(y_G, z) &= -\tau_{\alpha z}(y_G, -z) \quad (b) \end{aligned} \quad (2.31)$$

idénticamente se verifica también que:

$$\iint_{\Omega} \tau_{\alpha z} d\Omega = 0 \quad \left( \Rightarrow \iint_{\Omega} g(y_G, z) d\Omega = 0 \right) \quad (2.32)$$

### 2.3.1. ENERGÍA DE DEFORMACIÓN.

Para hallar la expresión del esfuerzo de corte " $Q$ " en función de " $u, v$  y  $\theta$ " y sus derivadas y el factor de corte " $m$ ", planteamos la energía complementaria clásica de deformación elástica [18]:

$$2W = \iiint \frac{\sigma^2}{E(y_G, z)} d\mathcal{V} + \iiint \frac{\tau_{\alpha r}^2 + \tau_{\alpha z}^2}{G(y_G, z)} d\mathcal{V} \quad (2.33)$$

Recordando las expresiones (2.1) donde  $\varphi_1(y_G, z)$  y  $\varphi_2(y_G, z)$  son independientemente arbitrarias, las definiciones (2.9) y la condición dada por (2.15), la expresión (2.33) se escribe –con el elemento de volumen  $d\mathcal{V} = r d\alpha d\Omega$ – como:

$$2W = R \cdot \int \left( \frac{N^2}{E_0 A^R} + \frac{M_D^2}{E_0 J^R} + \frac{m Q^2}{G_0 A^R} \right) d\alpha \quad (2.34)$$

donde "m", esencialmente positivo, se define como:

$$m \equiv \frac{A^R}{R} \iint_{\Omega} \frac{[f^2(y_G, z) + g^2(y_G, z)] \cdot r}{\varphi_2(y_G, z)} d\Omega \quad (2.35)$$

Por otra parte para encontrar una relación constitutiva para "Q" expresamos la energía "W", como la clásica definición de trabajo de deformación es decir:

$$2W = \iiint (\sigma \cdot \varepsilon + \tau_{\alpha r} \cdot \gamma_{\alpha r} + \tau_{\alpha z} \cdot \gamma_{\alpha z}) d\mathcal{V} \quad (2.36)$$

Cabe consignar que por razones de sencillez no se ha incluido la energía de deformación que pueden almacenar eventuales vinculaciones elásticas a tierra en los extremos de la pieza curva.

Teniendo en cuenta, entonces, las expresiones (2.5), (2.20), (2.21) y (2.22) y recordando que  $\gamma_{\alpha z} \equiv 0$  por hipótesis, podemos escribir que:

$$2W = R \cdot \int \left( \frac{N^2}{E_0 A^R} + \frac{M_D^2}{E_0 J^R} \right) d\alpha + \iiint \tau_{\alpha r} \cdot \gamma_{\alpha r} d\mathcal{V} \quad (2.37)$$

Comparando la (2.37) con (2.34) observamos que deberá cumplirse que:

$$\frac{mR}{G_0 A^R} \int Q^2 d\alpha = \iiint \tau_{\alpha r} \cdot \gamma_{\alpha r} \cdot r d\alpha d\Omega \quad (2.38)$$

Ahora bien de acuerdo a (2.5b) " $\gamma_{\alpha r} \cdot r$ " es función exclusiva de " $\alpha$ " y " $t$ "; a su vez recordando la expresión de la resultante "Q" dada por (2.30) se deduce que:

$$\frac{mR}{G_0 A^R} Q^2 = Q(u + v' + R\theta) \quad (2.39)$$

o sea

$$Q = \frac{G_0 A^R}{mR} (u + v' + R\theta) \quad (2.40)$$

Esta conclusión (2.40) junto con las expresiones (2.21) nos dan las ecuaciones constitutivas que relacionan los esfuerzos característicos globales con el campo de desplazamientos y sus derivadas espaciales en cada sección de una barra curva gruesa durante su movimiento plano. Todo ello debidamente justificado y dentro del marco de la indudablemente útil teoría de RM. A esta altura debemos recordar el APÉNDICE 7.

## 2.4. SISTEMA DIFERENCIAL DE MOVIMIENTO Y SUS C.B.

Conocemos la expresión general de energía de deformación " $W$ " (expresión (2.34)) y reemplazando respectivamente " $N$ ", " $M_D$ " y " $Q$ " por las expresiones (2.21) y (2.40), encontramos que:

$$2W = \frac{1}{R} \cdot \int_{(\alpha)} \left\{ E_0 \left[ A^R (u' - v)^2 + J^R \theta'^2 \right] + \frac{G_0 A^R}{m} (u + v' + R\theta)^2 \right\} d\alpha \quad (2.41)$$

Bastará plantear la energía cinética " $K$ " y la energía potencial " $P$ " debida al cambio de posición de las cargas aplicadas durante el movimiento, para, por ejemplo, a través del Teorema de Hamilton [5] hallar el sistema diferencial de movimiento plano del sistema estructural que nos ocupa. De acuerdo, entonces, al campo de desplazamientos (2.3) y

donde  $\dot{(\bullet)} \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$  tendremos:

$$2K = \iiint (\dot{u}_P^2 + \dot{v}_P^2 + \dot{w}_P^2) \rho(y_G, z) d\mathcal{V} \quad (2.42)$$

Considerando las definiciones dadas por las expresiones (2.1) y (2.3) " $K$ " valdrá:

$$2K = \rho_0 \iiint \{ [\dot{u} + \dot{\theta}(R - r)]^2 + \dot{v}^2 \} \cdot \varphi_3(y_G, z) r d\alpha d\Omega \quad (2.43)$$

Es práctico introducir los siguientes coeficientes:

$$\beta_j^R \equiv \int_{-h_e}^{h_i} r \cdot \mu^R(y_G) \cdot y^j dy_G \quad (j = 0, 1, 2) \quad (2.44)$$

donde

$$\mu^R(y_G) \equiv \int_{-\frac{b(y_G)}{2}}^{\frac{b(y_G)}{2}} \varphi_3(y_G, z) dz \quad (2.45)$$

Observemos que  $\beta_0^R$  y  $\beta_2^R$  son esencialmente positivos.

Reescribimos, entonces, la expresión (2.43) como:

$$2K = \rho_0 \int_{(\alpha)} [\beta_0^R (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + 2\beta_1^R \dot{u} \dot{\theta} + \beta_2^R \dot{\theta}^2] d\alpha \quad (2.46)$$

Por otro lado definimos la energía de posición o potencia de las cargas aplicadas " $P$ " como:

$$P = -R \cdot \int_{(\alpha)} (p_\alpha u + p_y v + p_\theta \theta) d\alpha \quad (2.47)$$

siendo  $p_y(\alpha, t)$ ,  $p_\alpha(\alpha, t)$  y  $p_\theta(\alpha, t)$  respectivamente las fuerzas radial, tangencial y el momento reducidos al eje neutro. Por simplicidad no agregamos a "P" los posibles aportes de esfuerzos concentrados en los extremos de la barra curva gruesa.

Aplicando por ejemplo los pasos convencionales requeridos por el Teorema de Hamilton, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales en  $\alpha$  y  $t$ , a coeficientes constantes en función de los tres desplazamientos espacio-temporales, que gobierna el movimiento de las barras curvas gruesas en sentido  $u$ ,  $v$  y  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{11}^R u'' - (\mathcal{C}_{11}^R + \mathcal{C}_{33}^R) v' - \mathcal{C}_{33}^R (u + R\theta) - (D_{11}^R \ddot{u} + D_{22}^R \ddot{\theta}) &= -R \cdot p_\alpha \quad (a) \\ \mathcal{C}_{33}^R v'' + (\mathcal{C}_{11}^R + \mathcal{C}_{33}^R) u' - \mathcal{C}_{11}^R v + R \cdot \mathcal{C}_{33}^R \theta' - D_{11}^R \ddot{v} &= -R \cdot p_y \quad (b) \\ \mathcal{C}_{22}^R \theta'' - R \cdot \mathcal{C}_{33}^R (u + v' + R\theta) - (D_{22}^R \ddot{u} + D_{33}^R \ddot{\theta}) &= -R \cdot p_\theta \quad (c) \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{11}^R &\equiv E_0 \alpha_0^R & \mathcal{C}_{22}^R &\equiv E_0 \alpha_2^R & \mathcal{C}_{33}^R &\equiv \frac{G_0 \alpha_0^R}{m} \\ D_{11}^R &\equiv \rho_0 \beta_0^R & D_{22}^R &\equiv \rho_0 \beta_1^R & D_{33}^R &\equiv \rho_0 \beta_2^R \end{aligned} \quad (2.49)$$

El sistema (2.48) es el mismo para cualquier tipo de sección simétrica, simple o múltiplemente conexa, no homogénea y coincide formalmente con el reportado en la referencia [1] para el caso materiales homogéneos ( $\varphi_j(y_G, z) = 1$ ,  $j = 1, 2, 3$ ). Es importante observar que a través de  $\beta_1^R (\Rightarrow D_{22}^R)$  se produce una acople dinámico flexo-axial que en realidad también se da para el caso de estas barras curvas gruesas con material homogéneo.

Otra forma de presentar las ecuaciones de vibración forzada es recurrir a las relaciones constitutivas (2.21) y (2.40) que escribimos, entonces como:

$$\begin{aligned} N' - Q - (D_{11}^R \ddot{u} + D_{22}^R \ddot{\theta}) &= -R \cdot p_\alpha \quad (a) \\ Q' + N - D_{11}^R \ddot{v} &= -R \cdot p_y \quad (b) \\ M'_D - R \cdot Q - (D_{22}^R \ddot{u} + D_{33}^R \ddot{\theta}) &= -R \cdot p_\theta \quad (c) \end{aligned} \quad (2.50)$$

**NOTA 2.4:** Sin cargas aplicadas ni efectos inerciales las (2.50) coinciden con las ecuaciones de equilibrio estático entre esfuerzos característicos que se muestran en el APÉNDICE 1.

Pasemos ahora a expresar las CB que para todo "t", surgen de la integración por partes durante la aplicación del método de Hamilton. Son las siguientes:

$$\left| \mathcal{C}_{11}^R (u'-v) \mathcal{F} \right|_{\alpha_0}^{\alpha_L} + \left| \mathcal{C}_{33}^R (u+v'+R \cdot \theta) \mathcal{G} \right|_{\alpha_0}^{\alpha_L} + \left| \mathcal{C}_{22}^R \theta' \mathcal{H} \right|_{\alpha_0}^{\alpha_L} = 0 \quad (2.51)$$

O bien considerando las expresiones (2.21), (2.40) y (2.49) se transforman en:

$$\left| N \mathcal{F} \right|_{\alpha_0}^{\alpha_L} + \left| Q \mathcal{G} \right|_{\alpha_0}^{\alpha_L} + \left| M_D \mathcal{H} \right|_{\alpha_0}^{\alpha_L} = 0 \quad (2.52)$$

donde  $\alpha_0$  y  $\alpha_L$  indican las coordenadas angulares de los extremos de la barra curva y además denominamos como " $\mathcal{F}$ ", " $\mathcal{G}$ " y " $\mathcal{H}$ " respectivamente a las variaciones admisibles de los desplazamientos " $u$ ", " $v$ " y " $\theta$ " cuando aplicamos el Cálculo de Variaciones. Las CB (2.51) o (2.52), se plantean en los extremos de la barra curva. Recordemos, además, que si la vinculación a tierra de la pieza exige que " $u$ " y/o " $v$ " y/o " $\theta$ " sean nulos o impuestos en el punto " $D$ ", correspondientemente lo serán " $\mathcal{F}$ " y/o " $\mathcal{G}$ " y/o " $\mathcal{H}$ ". Sin embargo es importante hacer notar que en no todos los casos las variaciones admisibles " $\mathcal{F}$ ", " $\mathcal{G}$ " y " $\mathcal{H}$ ", son independientes entre sí; dependiendo del tipo de vinculación, o en el caso de emplear vínculos elásticos, tendríamos una combinación de las variaciones. De esto, entonces, que genéricamente las C.B. las presentamos como una suma de trabajos virtuales que debe anularse en los extremos de la barra (por ejemplo ver Ref [16] y APÉNDICE 4).

## 2.5. VIBRACIONES NATURALES. CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD (CO).

Aceptamos modos armónicos de vibración para el sistema, o sea:

$$\{u, v, \theta\}(\alpha, t) = \{u, v, \theta\}(\alpha) e^{j\omega t} \quad (2.53)$$

se trata de una separación clásica de variables.

" $\omega$ " es la frecuencia circular (radianes/segundo) y " $j \equiv \sqrt{-1}$ ". Reemplazando esta propuesta en los sistemas diferenciales (2.48) y (2.50) sin cargas aplicadas se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{11}^R u'' - (\mathcal{C}_{11}^R + \mathcal{C}_{33}^R) v' - \mathcal{C}_{33}^R (u + R\theta) + \omega^2 (D_{11}^R u + D_{22}^R \theta) &= 0 & (a) \\ - \mathcal{C}_{33}^R v'' - (\mathcal{C}_{11}^R + \mathcal{C}_{33}^R) u' + \mathcal{C}_{11}^R v - R \cdot \mathcal{C}_{33}^R \theta' - \omega^2 D_{11}^R v &= 0 & (b) \\ \mathcal{C}_{22}^R \theta'' - R \cdot \mathcal{C}_{33}^R (u + v' + R\theta) + \omega^2 (D_{22}^R u + D_{33}^R \theta) &= 0 & (c) \\ N' - Q - \omega^2 (D_{11}^R u + D_{22}^R \theta) &= 0 & (d) \\ -Q' - N - \omega^2 D_{11}^R v &= 0 & (e) \\ M_D' - RQ + \omega^2 (D_{22}^R u + D_{33}^R \theta) &= 0 & (f) \end{aligned} \quad (2.54)$$

En estos sistemas " $N$ ", " $M_D$ ", " $Q$ ", " $u$ ", " $v$ " y " $\theta$ " son sólo funciones de " $\alpha$ ", independientes del tiempo.

Se trata de un sistema diferencial ordinario en " $\alpha$ " lineal a coeficientes constantes que da lugar a un típico problema de valores propios. Los autovalores son las frecuencias

naturales circulares " $\omega_n$ " ( $n=1,2,\dots$ ). Se hallan planteando (2.54) imponiendo una propuesta exponencial clásica " $u(\alpha) = \mathcal{U} e^{\lambda \alpha}$ ", " $v(\alpha) = \mathcal{V} e^{\lambda \alpha}$ " y " $\theta(\alpha) = \mathcal{W} e^{\lambda \alpha}$ ", con las CB (2.52) donde  $\lambda$  es una constante compleja en general; se llega a un sistema lineal homogéneo en las constantes  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$ . La condición de no trivialidad es una ecuación algebraica de sexto orden en  $\lambda$ . Las seis raíces (que dependen evidentemente de " $\omega$ ") nos permiten disponer de las tres formas modales en función de dieciocho (18) constantes. Reemplazadas en dos ecuaciones cualesquiera del sistema (2.54) el número de constantes se reduce a sólo seis arbitrarias. Planteando las seis CB (2.52) hallamos las infinitas (contables) frecuencias circulares " $\omega_n$ " ( $n=1,2,3,\dots$ ) que son los autovalores del problema. Correspondientemente con cada frecuencia  $n$ -ésima tenemos las autofunciones o formas modales  $n$ -ésimas " $u_n(\alpha)$ ", " $v_n(\alpha)$ " y " $\theta_n(\alpha)$ ".

En el APÉNDICE 3 se desarrollan las CO entre formas modales para el presente problema de barras curvas gruesas. O sea para dos modos arbitrarios (el  $n$ -ésimo y el  $i$ -ésimo) se verifica con " $\omega_n \neq \omega_i$ " la 1<sup>ra</sup> Condición de Ortogonalidad

$$\int_{(\alpha)} [D_{11}^R(u_n u_i + v_n v_i) + D_{22}^R(u_n \theta_i + u_i \theta_n) + D_{33}^R \theta_n \theta_i] d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ \|\mathcal{N}_n\| & \text{si } i = n \end{cases} \quad (i, n = 1, 2, \dots) \quad (2.55)$$

En el mismo APÉNDICE 3 también hallamos la 2<sup>da</sup> y 3<sup>ra</sup> Condición de Ortogonalidad (consecuencias de la 1<sup>ra</sup>)

$$\int_{(\alpha)} \left( \frac{N_n N_i}{\mathcal{C}_{11}^R} + \frac{M_{Dn} M_{Di}}{\mathcal{C}_{22}^R} + \frac{Q_n Q_i}{\mathcal{C}_{33}^R} \right) d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ \omega_n^2 \|\mathcal{N}_n\| & \text{si } i = n \end{cases} \quad (a) \quad (2.56)$$

$$\int_{(\alpha)} \left[ \left( N_n' - Q_n \right) u_i + \left( M_{Dn}' - R \cdot Q_n \right) \theta_i + \left( Q_n' + N_n \right) v_i \right] d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ -\omega_n^2 \|\mathcal{N}_n\| & \text{si } i = n \end{cases} \quad (b)$$

( $i, n = 1, 2, \dots$ )

donde recordando las expresiones (2.21), (2.40) y (2.49) denominamos

$$\begin{aligned} N_n &= \mathcal{C}_{11}^R (u_n' - v_n) & (a) \\ M_{Dn} &= \mathcal{C}_{22}^R \theta_n' & (b) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ Q_n &= \mathcal{C}_{33}^R (u_n + v_n' + R \theta_n) & (c) \end{aligned} \quad (2.57)$$



Como " $\alpha_0^R > 0$  y  $\alpha_2^R > 0$ " también se cumple que " $\mathcal{C}_{11}^R > 0, \mathcal{C}_{22}^R > 0, \mathcal{C}_{33}^R > 0$ " (observar (2.49)). Vemos de acuerdo a (2.56) que  $\|\mathcal{N}_n\| > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) lo que no es obvio deducirlo a partir de la Condición (2.55).

Las Condiciones de Ortogonalidad son de utilidad para hallar el movimiento de la pieza bajo cargas dinámicas que desarrollamos en el ítem siguiente.

## 2.6. VIBRACIÓN FORZADA EN BARRAS CURVAS. SUPERPOSICIÓN MODAL.

Como vemos, es posible abordar el sistema diferencial para el movimiento plano de una barra curva gruesa —expresiones (2.48) ó (2.50)— por el método de separación de variables que nos condujo a un problema diferencial “estático”, tipo Sturm-Liouville (ver sistema 2.54).

Una vez halladas las frecuencias naturales " $\omega_n$ " y sus correspondientes formas modales " $u_n(\alpha)$ ", " $v_n(\alpha)$ " y " $\theta_n(\alpha)$ " ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), podemos emplear de forma clásica el denominado Método de Superposición Modal para la resolución del sistema dinámico (2.48) (ó (2.50)) para cargas aplicadas espacio–temporales. En efecto. Proponemos para la solución del movimiento (o vibración forzada) del sistema las siguientes combinaciones lineales en el tiempo es decir la superposición de los modos naturales:

$$\begin{aligned} u &= u(\alpha, t) = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^R(t) u_n(\alpha) & (a) \\ v &= v(\alpha, t) = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^R(t) v_n(\alpha) & (b) \\ \theta &= \theta(\alpha, t) = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^R(t) \theta_n(\alpha) & (c) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Cabe destacar que las funciones temporales " $Y_n^R(t)$ " son las mismas para cada componente modal del campo de desplazamientos. Además considerando las expresiones modales (2.57) podemos escribir que:

$$\begin{aligned} N &= N(\alpha, t) = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^R(t) N_n(\alpha) & (a) \\ M_D &= M_D(\alpha, t) = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^R(t) M_{Dn}(\alpha) & (b) \\ Q &= Q(\alpha, t) = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^R(t) Q_n(\alpha) & (c) \end{aligned} \quad (2.59)$$

**NOTA 2.5:** En un problema periódico como el de anillos libres moviéndose en su plano, se da el caso especial de que se obtienen 2 conjuntos de formas modales desfasadas entre sí en  $90^\circ$ . Las superposiciones (2.58) y (2.59) deberán ampliarse utilizando 2 funciones temporales para combinar linealmente a ambos conjuntos modales [15].

Entonces hasta el momento tenemos desplazamientos y esfuerzos que dependen de " $\alpha$ " y " $t$ ", que satisfacen las CB (que son homogéneas) y el sistema (2.54) ya que cada modo  $n$ -ésimo lo satisface. Nos resta verificar el sistema dinámico (2.48) ó (2.50) y garantizar la Condiciones Iniciales (CI) que en general expresamos como:

$$\begin{aligned} u(\alpha, 0) &= U_0(\alpha) \quad (a) ; \quad \dot{u}(\alpha, 0) = U_1(\alpha) \quad (d) \\ v(\alpha, 0) &= V_0(\alpha) \quad (b) ; \quad \dot{v}(\alpha, 0) = V_1(\alpha) \quad (e) \\ \theta(\alpha, 0) &= \Theta_0(\alpha) \quad (c) ; \quad \dot{\theta}(\alpha, 0) = \Theta_1(\alpha) \quad (f) \end{aligned} \quad (2.60)$$

" $U_0(\alpha), V_0(\alpha), \Theta_0(\alpha), U_1(\alpha), V_1(\alpha), \Theta_1(\alpha)$ " son funciones espaciales, datos del problema a resolver, que evidentemente satisfacen las CB.

Es sencillo hallar, entonces, los valores de " $Y_n^R(0)$  e  $\dot{Y}_n^R(0)$  ( $n=1,2,\dots$ )" de la manera detallada a continuación. En las seis expresiones (2.60) introducimos las propuestas (2.58) con lo cual:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^R(0) u_n(\alpha) &= U_0(\alpha) \quad (a) ; \quad \sum_{n=1,2,\dots} \dot{Y}_n^R(0) u_n(\alpha) = U_1(\alpha) \quad (d) \\ \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^R(0) v_n(\alpha) &= V_0(\alpha) \quad (b) ; \quad \sum_{n=1,2,\dots} \dot{Y}_n^R(0) v_n(\alpha) = V_1(\alpha) \quad (e) \\ \sum_{n=1,2,\dots} Y_n^R(0) \theta_n(\alpha) &= \Theta_0(\alpha) \quad (c) ; \quad \sum_{n=1,2,\dots} \dot{Y}_n^R(0) \theta_n(\alpha) = \Theta_1(\alpha) \quad (f) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Efectuamos simbólicamente las siguientes sumas m.a.m. e integramos en  $\alpha$  arribando a:

$$\begin{aligned} \int_{(\alpha)} \left\{ D_{11}^R [(2.61a)u_i + (2.61b)v_i] + D_{33}^R (2.61c)\theta_i + D_{22}^R [(2.61a)\theta_i + (2.61c)u_i] \right\} d\alpha \quad (a) \\ \int_{(\alpha)} \left\{ D_{11}^R [(2.61d)u_i + (2.61e)v_i] + D_{33}^R (2.61f)\theta_i + D_{22}^R [(2.61d)\theta_i + (2.61f)u_i] \right\} d\alpha \quad (b) \end{aligned} \quad (2.62)$$

( $n=1, 2, 3, \dots$ )

Tomando en consideración en (2.62) la primera CO obtenemos respectivamente que:

$$\begin{aligned} Y_n^R(0) &= \frac{1}{\|\mathcal{N}_n\|} \int_{(\alpha)} \left[ D_{11}^R (U_0 u_n + V_0 v_n) + D_{22}^R (U_0 \theta_n + \Theta_0 u_n) + D_{33}^R \Theta_0 \theta_n \right] d\alpha \quad (a) \\ \dot{Y}_n^R(0) &= \frac{1}{\|\mathcal{N}_n\|} \int_{(\alpha)} \left[ D_{11}^R (U_1 u_n + V_1 v_n) + D_{22}^R (U_1 \theta_n + \Theta_1 u_n) + D_{33}^R \Theta_1 \theta_n \right] d\alpha \quad (b) \end{aligned} \quad (2.63)$$

( $n=1, 2, \dots$ )

Como veremos a continuación las funciones  $Y_n^R(t)$ , surgirán de ecuaciones diferenciales de 2º orden en el tiempo y entonces sólo se requerirán los valores de " $Y_n^R(0)$  e  $\dot{Y}_n^R(0)$  ( $n=1,2,\dots$ )" que conocemos de (2.63).

Entonces, reemplazamos la propuesta (2.58) y la (2.59) en el sistema (2.50) obteniendo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1,2,\dots} \left\{ Y_n^R(t) \left[ N_n'(\alpha) - Q_n(\alpha) \right] - \ddot{Y}_n^R(t) \left[ D_{11}^R u_n(\alpha) + D_{22}^R \theta_n(\alpha) \right] \right\} &= -R p_\alpha(\alpha, t) \quad (a) \\
\sum_{n=1,2,\dots} \left\{ Y_n^R(t) \left[ Q_n'(\alpha) + N_n(\alpha) \right] - \ddot{Y}_n^R(t) D_{11}^R v_n(\alpha) \right\} &= -R p_y(\alpha, t) \quad (b) \\
\sum_{n=1,2,\dots} \left\{ Y_n^R(t) \left[ M_{D_n}'(\alpha) - R Q_n(\alpha) \right] - \ddot{Y}_n^R(t) \left[ D_{22}^R u_n(\alpha) + D_{33}^R \theta_n(\alpha) \right] \right\} &= -R p_\theta(\alpha, t) \quad (c)
\end{aligned} \quad (2.64)$$

Efectuando simbólicamente m.a.m. la acción siguiente:

$$\int_{(\alpha)} [(2.64a)u_i(\alpha) + (2.64b)v_i(\alpha) + (2.64c)\theta_i(\alpha)] d\alpha \quad \forall i \quad (2.65)$$

y teniendo en cuenta las CO y expresiones de la norma  $\|\mathcal{N}_i\|$  del APÉNDICE 3, llegamos a que debe verificarse el siguiente sistema diferencial ordinario infinito y diagonal en las  $Y_i^R(t)$  ( $i=1,2,3,\dots$ ) que vale:

$$\ddot{Y}_i^R(t) + \omega_i^2 Y_i^R(t) = \phi_i(t) \quad ; \quad (i=1, 2, \dots) \quad (2.66)$$

Hemos denominado por simplificación de presentación como:

$$\phi_i(t) = \frac{R}{\|\mathcal{N}_i\|(\alpha)} \int [p_\alpha(\alpha, t)u_i(\alpha) + p_y(\alpha, t)v_i(\alpha) + p_\theta(\alpha, t)\theta_i(\alpha)] d\alpha \quad ; \quad (i=1, 2, \dots) \quad (2.67)$$

que son funciones  $i$ -ésimas del tiempo, datos del problema.

La solución para cada  $Y_i^R(t)$  es la suma de una solución homogénea (con  $\phi_i(t) \equiv 0$ )  $Y_{i_H}^R(t)$ , más una particular  $Y_{i_0}^R(t)$  que depende de  $\phi_i(t)$ ; o sea:

$$Y_i^R(t) = Y_{i_H}^R(t) + Y_{i_0}^R(t) \quad \forall i \quad (2.68)$$

Evidentemente tenemos que:

$$Y_{i_H}^R(t) = a_i^R \sin \omega_i t + b_i^R \cos \omega_i t \quad (2.69)$$

donde " $a_i^R$ " y " $b_i^R$ " son constantes que se fijan en base a las CI.

Como sabemos disponemos de infinitas posibilidades para las soluciones particulares, y teóricamente, siempre es posible determinarlas con  $\phi_i(t)$  y las básicas de (2.69) (recordar definición del Wronskiano). En definitiva de acuerdo a las CI será:

$$a_i^R = \frac{1}{\omega_i} [\dot{Y}_i^R(0) - \dot{Y}_{i_0}^R(0)] \quad (a) \quad \forall i \quad (2.70)$$

$$b_i^R = Y_i^R(0) - Y_{i_0}^R(0) \quad (b)$$

Los valores  $n$ -ésimos  $Y_n^R(0)$  y  $\dot{Y}_n^R(0)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) los obtuvimos en (2.63).

De esta manera hemos concluido el problema de movimiento o de vibración forzada de una barra curva gruesa por el método clásico de superposición modal. O sea: conocidas las  $Y_n^R(t)$  y las formas modales " $u_n(x)$ ", " $v_n(x)$ " y " $\theta_n(x)$ " ( $n=1, 2, \dots$ ) las ecuaciones (2.58) o (2.59) nos brindan la respuesta dinámica buscada.

Vemos, entonces, que el problema dinámico –vibraciones naturales y vibración forzada– de barras curvas gruesas, es totalmente análogo y paralelo al que hemos desarrollado en la PARTE PRIMERA para barras rectas gruesas.

## BARRAS RECTAS GRUESAS FICTICIAS

### 2.7. DESARROLLO DE LA IDEA: RESULTADO FUNDAMENTAL

En este ítem propondremos una metodología que permitirá abordar a las barras curvas gruesas no homogéneas como un tipo especial de barras rectas, por lo cual, en general, se simplificará la complejidad del cálculo para encontrar la distribución de las tensiones tangenciales debidas al esfuerzo de corte  $Q$  y con ella el cálculo del factor " $m$ " de corte. Como veremos la ecuación diferencial de equilibrio será formalmente la misma que la de barras rectas gruesas propiamente dichas, pero se modificará la expresión del término independiente; denominaremos al desarrollo como "TEORÍA DE BARRAS RECTAS GRUESAS FICTICIAS O RESULTADO FUNDAMENTAL".

La idea, simple, consiste en definir dos "tensiones" tangenciales,  $\tau_y$  y  $\tau_z$  como:

$$\tau_y \equiv \tau_{\alpha r} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (a) \quad ; \quad \tau_z \equiv \tau_{\alpha z} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (b) \quad (2.71)$$

Reemplazadas en la ecuación diferencial de equilibrio de barras curvas gruesas dada por la expresión (2.26) obtenemos

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = \Gamma(y_G, z) \cdot Q \quad (2.72)$$

donde

$$\Gamma(y_G, z) = \frac{\varphi_1(y_G, z)}{J^R} (\mathcal{K} - y_G) \quad (2.73)$$

A su vez

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= R_G - \mathcal{K}^* \quad (a) \\ \mathcal{K}^* &= R + \frac{J^R}{R \cdot A^R} \quad (b)\end{aligned}\tag{2.74}$$

siendo  $R$ ,  $A^R$  y  $J^R$  los parámetros calculados para la sección de la barra curva gruesa bajo estudio.

Ahora bien, considerando las expresiones (2.19) y (2.20) de  $\alpha_2^R$ ,  $A^R$  y  $J^R$ , vemos que la (2.74b) vale

$$\mathcal{K}^* = R_G - \Delta \tag{2.75}$$

Por lo tanto obtenemos por (2.74) y (2.75) el importante resultado siguiente:

$$\boxed{\mathcal{K} = \Delta} \tag{2.76}$$

Recordemos que  $\Delta$  proviene de la teoría de barras rectas gruesas donde es el corrimiento del eje neutro respecto del eje baricéntrico.

Es útil destacar esta propiedad: al verificarse (2.76), donde  $\Delta$  como acabamos de decir, fue deducido para barras rectas, observamos que el parámetro  $\mathcal{K} = \Delta$  es independiente de la curvatura de la pieza.

Las condiciones de nulidad para  $\Delta$  de acuerdo a la NOTA 1.3, se extienden entonces para  $\mathcal{K}$ .

Por lo expuesto, la ecuación de equilibrio para barras rectas ficticias, se reescribe de acuerdo a (2.72), (2.73) y (2.76) como

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = \frac{\varphi_1(y_G, z)}{J^R} \cdot (\Delta - y_G) \cdot Q \tag{2.77}$$

NOTA 2.6: Las ecuaciones de equilibrio interno para barras rectas ficticias y barras rectas gruesas dadas respectivamente por (2.77) y (1.26), son formalmente iguales, con la sola condición de intercambiar  $J^R$  y  $J^\infty$ .

Las “tensiones”  $\tau_y$  y  $\tau_z$  obtenidas al resolver (2.77) deben evidentemente verificar las CB: condiciones de reciprocidad y continuidad en las fronteras de la sección y subdominios en los cuales fue dividida. Sin embargo, no debe perderse de vista que estamos realmente resolviendo una barra curva gruesa a través del RESULTADO FUNDAMENTAL. Ahora bien, por la definición (2.71) y porque siempre  $R/r \neq 0$ , es equivalente plantear las CB directamente utilizando  $\tau_y$  y  $\tau_z$ .

Por igual razonamiento de que el problema físico real es hallar la distribución del régimen tensional en una barra curva gruesa, deberá cumplirse por equilibrio global que

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \tau_{\alpha r} d\Omega &= Q \quad (a) \\ \iint_{\Omega} \tau_{\alpha z} d\Omega &= 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (2.78)$$

En tanto, por razones de antisimetría  $(\tau_z(y_G, z) = -\tau_z(y_G, -z))$  la (2.78b) se verificaría idénticamente también con estas tensiones ficticias; no sucede lo mismo con la restricción (2.78a). En efecto. Por la similitud de las ecuaciones (1.26) y (2.77) tendremos las siguientes relaciones:

$$\tau_y = \frac{J^\infty}{J^R} \cdot \tau_{xy} \quad (a) \quad ; \quad \tau_z = \frac{J^\infty}{J^R} \cdot \tau_{xz} \quad (b) \quad (2.79)$$

Al verificarse el equilibrio global de barras rectas gruesas expresado por (1.30a) con  $\tau_{xy}$  ( $J^\infty \neq J^R$ ), no podría cumplirse con las tensiones  $\tau_y$  de acuerdo a (2.79a). O sea es sencillo ver que en cambio se satisfará:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \tau_y d\Omega &= \frac{J^R}{J^\infty} \cdot Q \quad (a) \\ \iint_{\Omega} \tau_z d\Omega &= 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (2.80)$$

En definitiva. Una vez resuelta la barra curva gruesa, a través de la teoría de barras rectas ficticias, se cumplirá indiferentemente que:

$$\begin{aligned} R^2 \cdot \iint_{\Omega} \frac{\tau_y}{r^2} d\Omega &= \iint_{\Omega} \tau_{\alpha r} d\Omega = \iint_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega = \frac{J^R}{J^\infty} \cdot \iint_{\Omega} \tau_y d\Omega = Q \quad (a) \\ R^2 \cdot \iint_{\Omega} \frac{\tau_z}{r^2} d\Omega &= \iint_{\Omega} \tau_{\alpha z} d\Omega = \iint_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega = \frac{J^R}{J^\infty} \cdot \iint_{\Omega} \tau_z d\Omega = 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Como expresamos más arriba, las (2.81b) se cumplen por la antisimetría de las tensiones tangenciales en sentido z, en las secciones simétricas consideradas (recordar (1.31b) y (2.31b))

Hemos reducido, entonces, la búsqueda de la distribución de tensiones tangenciales en una sección no homogénea de una barra curva gruesa, a resolver la ecuación de equilibrio (2.77) de una barra “recta ficticia” donde el término independiente sólo depende de la curvatura a través de  $J^R$ . Claro está que una vez halladas  $\tau_y$  y  $\tau_z$  de (2.71) obtenemos las tensiones  $\tau_{\alpha r}$  y  $\tau_{\alpha z}$  de la barra curva gruesa bajo estudio y con éstas el factor de corte por medio de la expresión (2.35) con (2.27).

## TEOREMA GENERAL

Una vez desarrollada la teoría de barras rectas ficticias (RESULTADO FUNDAMENTAL) de la sección anterior, pasamos a enunciar otro resultado general que permitirá, afrontar la distribución de las tensiones tangenciales –y con ésta obtener el factor de corte " $m$ "– considerando a cualquier tipo de barra gruesa, indistintamente, como recta, curva o recta ficticia. En efecto. Una vez elegida la forma de la sección transversal y la variación funcional del módulo de Young a través de la función  $\varphi_1(y_G, z)$ , independientemente del cálculo de las tensiones tangenciales, podemos conocer todas las características físico-geométricas de la sección para los tres (3) tipos de barras gruesas consideradas: " $\Delta, A^\infty$  y  $J^\infty$ " para barras rectas, " $R, A^R$  y  $J^R$ " para barras curvas y " $\mathcal{K} = \Delta$  y  $\mathcal{K}^*$ " de barras rectas ficticias (con  $R, A^R$  y  $J^R$  de las barras curvas correspondientes). Entonces partiendo de la NOTA 2.6 de la PARTE SEGUNDA, donde las ecuaciones de equilibrio interno para las barras rectas gruesas y ficticias son formalmente las mismas con sólo intercambiar ciertos parámetros entre ellas, podemos enunciar el siguiente TEOREMA GENERAL

*Si se conoce la distribución del régimen de tensiones tangenciales para alguno de los tres tipos de barras gruesas de sección arbitraria no homogénea, también se conocen las distribuciones correspondientes a los otros dos tipos de barras con igual sección transversal.*

Podemos decir, *grosso modo*, que disponer del TEOREMA GENERAL, reduce el espectro de los tipos de barras a considerar para calcular tensiones tangenciales. Bastaría, por ejemplo, considerar siempre las barras rectas gruesas, ya que una vez conocida la distribución de las tensiones tangenciales, se conocerán entonces en las barras curvas de igual sección. Efectivamente solucionamos de la forma más sencilla la búsqueda de estas tensiones. Sin embargo y evidentemente, para calcular el factor de corte o los coeficientes del sistema diferencial de ecuaciones de frecuencias o movimiento, debemos apelar a la teoría particular correspondiente al tipo estructural que debamos resolver.

Conociendo como dato la distribución funcional del módulo de elasticidad transversal a través de  $\varphi_2(y_G, z)$ , podemos por medio de las expresiones (1.34) y (2.35) conocer el factor de corte " $m$ " de barras gruesas rectas y curvas, respectivamente.

En el ejemplo 20 de la PARTE QUINTA, se desarrolla detalladamente una aplicación del TEOREMA GENERAL, para una barra de sección rectangular funcionalmente graduada en  $y_G$  y  $z$ .

## PARTE TERCERA

### DOS TIPOS DE SUPERPOSICIÓN TENSIONAL PARA HALLAR LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES CUANDO EL MÓDULO DE YOUNG ES VARIABLE “A SALTOS” EN LA SECCIÓN

#### 1. GENERALIDADES

Debido a que el factor de corte es un parámetro indispensable para conocer los coeficientes de los sistemas diferenciales para frecuencias naturales y para movimiento forzado de barras gruesas no homogéneas, tanto rectas, curvas como rectas ficticias, es que la búsqueda de la distribución de tensiones tangenciales que da lugar al factor " $m$ ", pasa a ser imprescindible y entonces es muy deseable reducir el esfuerzo para determinarlo. Las ideas serán desarrolladas con suficiente generalidad como para poder aplicarse a cualquier tipo estructural.

Dos planteos diferentes permitirán hallar el régimen de las tensiones tangenciales actuando en cada elemento de área de la sección no homogénea, superponiendo diversos regímenes que corresponden a adecuados subdominios homogéneos, en los cuales parcializamos la sección bajo estudio.

Previamente a describir ambas herramientas, observamos que cualquier distribución de tensiones tangenciales debidas a un esfuerzo de corte " $Q$ ", depende de la geometría de la sección y de la variación del Módulo de Young  $E(y_G, z) = E_0 \cdot \varphi_1(y_G, z)$  ( $E_0$  es un valor fijo arbitrario que se toma como referencia). Ahora bien las  $\varphi_1(y_G, z)$  que consideraremos no son analíticas y variarán “a saltos” en la sección. Esto es: las superposiciones que plantearemos serán válidas para este particular tipo de distribución del Módulo Elástico.

Partiremos de trabajar las ecuaciones de equilibrio, que no están influenciadas ni por el módulo transversal de elasticidad ni por la densidad del material.

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio que deben satisfacer las tensiones tangenciales valen, de acuerdo al caso y a lo visto, lo siguiente:

▪ BARRAS RECTAS GRUESAS (Ecuación (1.26))

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\varphi_1(y_G, z) \cdot \frac{Q}{J^\infty} y \quad (3.1)$$

donde " $y$ " es la coordenada sobre el eje de simetría de la sección con origen en " $D$ " contenido en el eje neutro. El valor de  $J^\infty$  de acuerdo a (1.20) es

$$J^\infty \equiv \alpha_2^\infty \quad (3.2)$$



▪ BARRAS CURVAS GRUESAS (Ecuación (2.26))

$$r \cdot \left( \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} \right) - 2\tau_{\alpha r} = -\varphi_1(y_G, z) \cdot \left( \frac{U}{r} + V \right) \cdot Q \quad (3.3)$$

donde "r" es la coordenada radial medida desde el Centro de Curvatura; recordemos que:

$$r = R - y = R_G - y_G \quad (3.4)$$

donde "R" es el radio neutro, "R<sub>G</sub>" es el radio baricéntrico, "y" es la coordenada medida desde el punto "D" e "y<sub>G</sub>" es la coordenada medida desde el baricentro "G".

Sabemos, también (2.25b) que:

$$V = -\frac{R^2}{J^R} ; \quad U = -V \left( R + \frac{J^R}{A^R R} \right) \quad (3.5)$$

siendo

$$J^R = R \cdot \alpha_2^R \quad (3.6)$$

▪ BARRAS RECTAS GRUESAS FICTICIAS (Ecuación (2.77))

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = \frac{\varphi_1(y_G, z)}{J^R} (\Delta - y_G) \cdot Q \quad (3.7)$$

donde, recordemos de (2.20), (2.71), (2.74) y (2.75) que

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \Delta = R_G - \mathcal{K}^* \quad (a) ; \quad \mathcal{K}^* &= R + \frac{J^R}{R \cdot A^R} \quad (b) \\ J^R &= R \alpha_2^R \quad (c) \\ \tau_{\alpha r} = \tau_y \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad (d) ; \quad \tau_{\alpha z} &= \tau_z \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad (e) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Recordando (3.4) y (3.8), la ecuación de equilibrio (3.7) puede escribirse también como:

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = -\frac{\varphi_1(y_G, z)}{J^R} \left( \frac{\alpha_2^R}{R \alpha_0^R} + y \right) \cdot Q \quad (3.9)$$

Indicamos a continuación las mismas ecuaciones de equilibrio para el caso de secciones homogéneas para el cual  $\varphi_1(y_G, z) = k$ , es decir que:

$$E(y_G, z) = k \cdot E_0 \quad (3.10)$$

Donde "k" es una constante.

*NOTA 3.1: Tomar un valor de  $k \neq 1$  únicamente tiene sentido si sobre la sección se combinan más de un material elástico.*

Entonces las nuevas ecuaciones de equilibrio son:

- **BARRAS RECTAS GRUESAS HOMOGÉNEAS** ( $\varphi_1(y_G, z) = k$ )

Se verifica que:

$$\Delta = 0 \quad (a) \quad ; \quad y = y_G \quad (b) \quad ; \quad J^\infty = J_G \quad (c) \quad (3.11)$$

De esta manera la ecuación (3.1) se escribe como:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{k \cdot Q}{J_G} y_G \quad (3.12)$$

La resolución de esta ecuación diferencial de equilibrio conduce equivalentemente a las expresiones de Collignon o de Jourawsky.

- **BARRAS CURVAS GRUESAS HOMOGÉNEAS** ( $\varphi_1(y_G, z) = k$ )

Se verifica que (ver *NOTA 2.3* que vale aún para  $k \neq 1$ ):

$$U = -V R_G \quad (3.13)$$

Luego, la ecuación de equilibrio (3.3) de acuerdo a (3.4) se escribe para este caso como:

$$r \cdot \left( \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial r} - \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} \right) + 2\tau_{\alpha r} = -k \cdot V \cdot \left( \frac{R_G}{r} - 1 \right) \cdot Q \quad (3.14)$$

- **BARRAS RECTAS GRUESAS FICTICIAS HOMOGÉNEAS** ( $\varphi_1(y_G, z) = k$ )

Se cumple en este caso que (ver exp. (2.76) y *NOTA 1.3*):

$$\mathcal{K} = \Delta = 0 \quad (3.15)$$

y entonces la ecuación (3.7) de equilibrio se escribe como:

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = -\frac{k \cdot Q}{J^R} \cdot y_G \quad (3.16)$$

*NOTA 3.2: Como ya dijimos salvo el valor del momento de segundo orden, las expresiones (3.12) y (3.16) son formalmente iguales a las correspondientes de barras rectas gruesas, aunque planteadas para problemas estructuralmente distintos. En definitiva, las barras curvas gruesas homogéneas pueden resolverse, como dijimos anteriormente, recurriendo al Resultado Fundamental por medio de expresiones equivalentes a la de Collignon o de Jourawsky.*

### 3.1 MÉTODO I DE SUPERPOSICIÓN

Denominamos como Método I a aquél que podrá aplicarse cuando la distribución funcional a saltos del Módulo de Young sobre la sección verifique:

$$\boxed{\iint_{\Omega} \varphi_1(y_G, z) \cdot y_G \, d\Omega = 0} \quad (3.17)$$

Recordemos que por definición en realidad  $\lambda^R(y_G) \equiv \lambda^\infty(y_G)$  (ver expresiones (1.10) y (2.10)).

La situación dada por (3.17) suele presentarse frecuentemente. La condición no implica, evidentemente, que la sección sea homogénea. Estamos considerando, en cambio, los casos donde aun siendo  $\varphi_1(y_G, z) \neq \text{constante}$  verifica la condición (3.17).

No es difícil deducir que en estos casos se cumple que:

#### ▪ EN BARRAS RECTAS GRUESAS

$$\Delta = 0 \quad (a) ; \quad y = y_G \quad (b) ; \quad R = R_G \quad (c) \quad (3.18)$$

como sucede en barras rectas homogéneas (recordar (3.11)).

Por lo tanto la ecuación (3.1) se transforma en:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = - \frac{Q \cdot \varphi_1(y_G, z)}{J^\infty} \cdot y_G \quad (3.19)$$

#### ▪ EN BARRAS CURVAS GRUESAS

$$U = V R_G \quad (3.20)$$

como se da en barras curvas homogéneas.

Debido a esto, la ecuación (3.3) se escribe como:

$$r \cdot \left( \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial r} - \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} \right) + 2\tau_{\alpha r} = Q \cdot \varphi_1(y_G, z) \cdot V \cdot \left( 1 - \frac{R_G}{r} \right) \quad (3.21)$$

#### ▪ EN BARRAS RECTAS GRUESAS FICTICIAS

$$\Delta = \mathcal{K} = 0 \quad (3.22)$$

Análogamente a barras rectas ficticias homogéneas.

Por lo visto la ecuación (3.7) será:

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = - \frac{Q \cdot \varphi_1(y_G, z)}{J^R} \cdot y_G \quad (3.23)$$

Cualquiera sea el tipo de piezas, para aplicar este Método I sujeto a la restricción dada por la expresión (3.17), deberá poderse subdividir el dominio no homogéneo “a saltos” bajo estudio (sección de la barra), en subdominios homogéneos donde la coordenada " $y_G$ " sea única para todos y coincidente con la de la sección original. Si esto puede lograrse, la metodología es de utilidad y simplifica, como veremos, la búsqueda del campo tangencial de tensiones que solicita a la sección no homogénea que nos ocupa y con él proseguir con la determinación del factor de corte.

▪ Para fijar ideas y evitar una complicada (y tal vez confusa) charla describiendo el MÉTODO I DE SUPERPOSICIÓN, apliquemos la idea a una barra recta gruesa de sección rectangular como la de la Figura 3 con tres sectores con distinto módulo de Young.

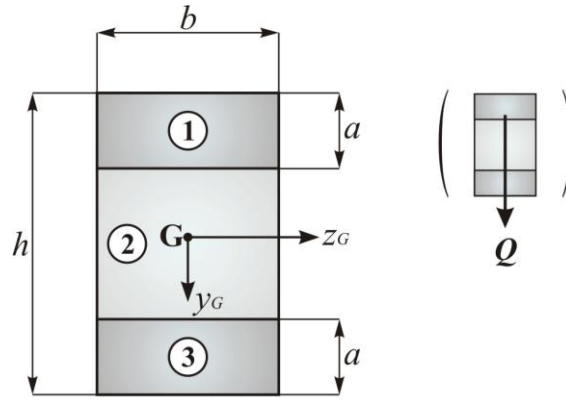


Figura 3

Los Sectores 1 y 3 tienen

$$\varphi_1(y_G, z) = k_1 \quad (3.24)$$

El Sector 2 a su vez

$$\varphi_1(y_G, z) = k_2 \quad (3.25)$$

Evidentemente se verifica la condición básica (3.17).

Comencemos, antes de tomar los subdominios homogéneos cuyos regímenes superpondremos, escribiendo las ecuaciones de equilibrio (3.19) para la barra recta gruesa no homogénea bajo estudio:

Sectores 1 y 3

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{k_1 \cdot Q}{J^\infty} y_G \quad (3.26)$$

Sector 2

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{k_2 \cdot Q}{J^\infty} y_G \quad (3.27)$$

Vale la pena destacar que en (3.26) y (3.27) el esfuerzo de corte " $Q$ " es el que solicita a la sección no homogénea y " $J^\infty$ " es el parámetro que también corresponde a la sección total no homogénea.

Ahora bien. La manera más simple de subdividir la sección en subdominios homogéneos que absorberán distintas fracciones del esfuerzo de corte " $Q$ " es la que se muestra en la Figura 4:

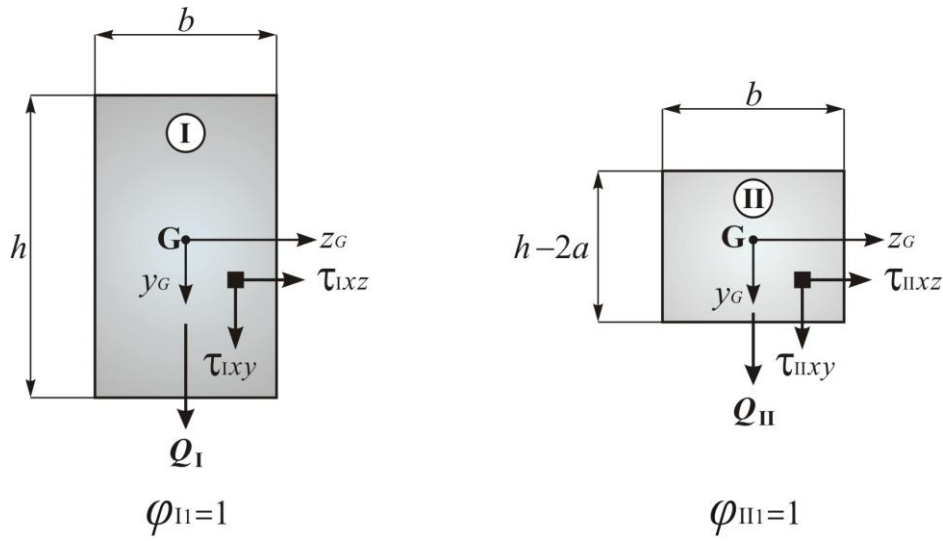


Figura 4

Las zonas (subdominios) I y II homogéneas cumplen con la condición de tener igual coordenada " $y_G$ " que coincide, como se requiere, con la de la sección total.

La distribución de tensiones tangenciales de estas zonas, corresponden a secciones rectangulares homogéneas, una de altura " $h$ " y otra de altura " $(h-2a)$ ", que deben cumplir respectivamente las siguientes ecuaciones de equilibrio con  $\varphi_{II} = \varphi_{III} = 1$ ,  $J_I^\infty = J_{GI}$  y  $J_{II}^\infty = J_{GII}$  (ver NOTA 1.3 y expresión (1.20))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{Ixy}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{Ixz}}{\partial z} &= -\frac{Q_I}{J_{GI}} y_G \quad (a) \\ \frac{\partial \tau_{IIxy}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{IIxz}}{\partial z} &= -\frac{Q_{II}}{J_{GII}} y_G \quad (b) \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde

$$J_{GI} = \frac{bh^3}{12} \quad (a) \quad ; \quad J_{GII} = \frac{b(h-2a)^3}{12} \quad (b) \quad (3.29)$$

y a su vez  $Q_I$  y  $Q_{II}$  son fracciones de  $Q$  que absorbe cada subdominio y que evidentemente deben verificar

$$Q_I + Q_{II} = Q \quad (3.30)$$

Del Ejemplo 2 de la PARTE QUINTA o sencillamente por la clásica fórmula de Collignon para secciones rectangulares homogéneas, los campos de tensiones tangenciales, para los subdominios de la Figura 4, valen:

$$\begin{aligned} \tau_{Ixy} &= \frac{Q_I h^2}{8J_{GI}} \left[ 1 - \left( \frac{2y_G}{h} \right)^2 \right] \quad (a) \quad ; \quad \tau_{Ixz} = 0 \quad (b) \\ \tau_{IIxy} &= \frac{Q_{II} (h-2a)^2}{8J_{GII}} \left[ 1 - \left( \frac{2y_G}{h-2a} \right)^2 \right] \quad (c) \quad ; \quad \tau_{IIxz} = 0 \quad (d) \end{aligned} \quad (3.31)$$

que satisfacen idénticamente las ecuaciones (3.28a) y (3.28b).

Observando la Figura 3 y aplicando la superposición que nos ocupa proponemos que en los Sectores 1 y 3

$$\tau_{xy} = \tau_{Ixy} \quad (a) \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{Ixz} (=0) \quad (b) \quad (3.32)$$

y en el Sector 2

$$\tau_{xy} = \tau_{Ixy} + \tau_{IIxy} \quad (a) \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{Ixz} + \tau_{IIxz} (=0) \quad (b) \quad (3.33)$$

Deben entonces satisfacerse las ecuaciones de equilibrio (3.26) y (3.27). Al considerar las propuestas (3.32) y (3.33) deducimos el siguiente sistema de ecuaciones en  $Q_I$  y  $Q_{II}$ :

$$\begin{aligned} \frac{Q_I}{J_{GI}} &= \frac{k_1 Q}{J^\infty} \quad (a) \\ \frac{Q_I}{J_{GI}} + \frac{Q_{II}}{J_{GII}} &= \frac{k_2 Q}{J^\infty} \quad (b) \end{aligned} \quad (3.34)$$

De las ecuaciones (3.34) obtenemos:

$$\begin{aligned} Q_I &= k_1 \cdot \frac{J_{GI}}{J^\infty} \cdot Q \quad (a) \\ Q_{II} &= (k_2 - k_1) \cdot \frac{J_{GII}}{J^\infty} \cdot Q \quad (b) \end{aligned} \quad (3.35)$$

El valor de " $J^\infty$ " puede ser obtenido de la teoría general (ver expresión (1.20)). Sin embargo " $J^\infty$ " se puede hallar también si reemplazamos los valores de  $Q_I$  y  $Q_{II}$  dados por (3.35) en la condición (3.30), obteniendo:

$$J^\infty = k_1 \cdot J_{GI} + (k_2 - k_1) \cdot J_{GII} \quad (3.36)$$

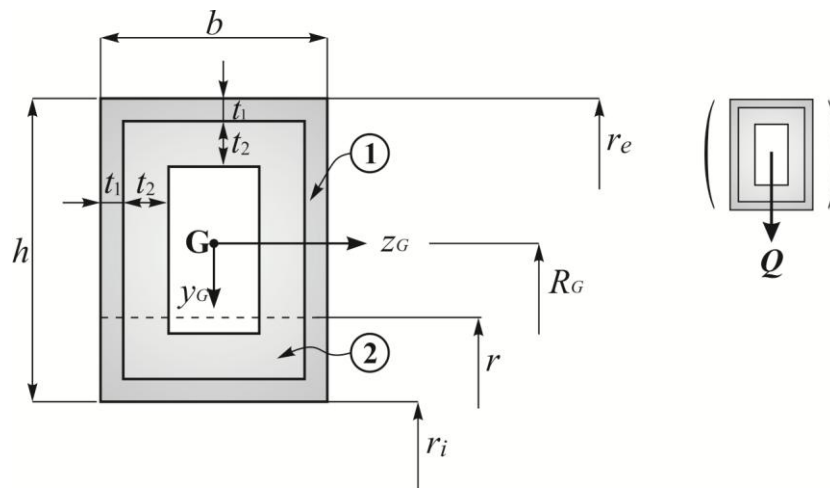
Desde ya las expresiones (1.20) y (3.36) coincidirán.

Conocemos entonces  $\tau_{Ixy}$  y  $\tau_{IIxy}$  por las ecuaciones (3.31) y con ellas por (3.32), (3.33) y (3.35) la distribución tensional definitiva para una barra recta gruesa con módulo de Young variable "a saltos".

Finalizando este ejemplo señalemos que si bien hemos resuelto dos rectángulos homogéneos de distinta altura con sus correspondientes condiciones de reciprocidad en el tope y fondo, al superponer, y por hipótesis, automáticamente se verifica la reciprocidad (continuidad) intermedia de las tensiones tangenciales del problema completo. Es interesante, observar además, que la metodología provee una herramienta para calcular indirectamente ciertos parámetros de la sección no homogénea bajo estudio: en este ejemplo, como dijimos, " $J^\infty$ " dado por la expresión (3.36).

Evidentemente la sección rectangular no homogénea bajo estudio podría haberse abordado directamente sin utilizar la herramienta de superposición.

▪ Resolveremos a continuación una **barra curva gruesa** con sección rectangular hueca de dos capas de espesores arbitrarios y distintos módulos de elasticidad (material "composite") (Figura 5). Recurriremos al RESULTADO FUNDAMENTAL de la PARTE SEGUNDA y la abordaremos por medio de la teoría de **barras rectas gruesas ficticias**.



De

Figura 5

nuevo será

ventajoso utilizar el MÉTODO I DE SUPERPOSICIÓN

El Sector 1 tiene

$$\varphi_1(y_G, z) = k_1 \quad (3.37)$$

El Sector 2 a su vez

$$\varphi_2(y_G, z) = k_2 \quad (3.38)$$

Se puede observar que se cumple la condición fundamental (3.17) que permitirá aplicar el MÉTODO I DE SUPERPOSICIÓN.

Escribamos las ecuaciones de equilibrio (3.23) para una barra recta gruesa ficticia no homogénea "a saltos" con  $\mathcal{K} = 0$  (ver Ecuación (3.22)), debido a la condición (3.17):

Sector 1

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = -\frac{k_1 \cdot Q}{J^R} y_G \quad (3.39)$$

Sector 2

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = -\frac{k_2 \cdot Q}{J^R} y_G \quad (3.40)$$

El valor de " $J^R$ " (expresión (2.20)) y " $Q$ " corresponden a la sección total no homogénea bajo estudio.

Dividimos ahora la sección en dos subdominios I y II homogéneos que absorben respectivamente las fracciones  $Q_I$  y  $Q_{II}$  del esfuerzo de corte (Figura 6).

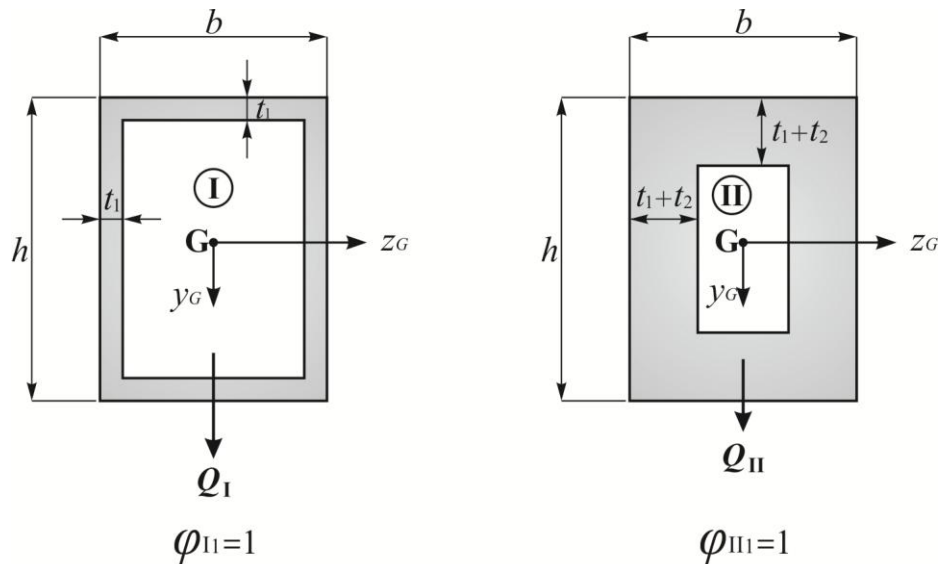


Figura 6



Los subdominios homogéneos (zonas) I y II y la sección total tienen igual coordenada " $y_G$ ". La distribución tensional para las zonas I y II  $-\tau_{Iy}, \tau_{Iz}, \tau_{IIy}$  y  $\tau_{IIz}$  considerando la transformación (2.71) están resueltas en el Ejemplo 11 de la PARTE QUINTA. En la zona I tomamos  $t = t_1$  y  $J^R = J_I$ , y para la zona II,  $t = t_1 + t_2$  y  $J^R = J_{II}$ . Asumimos  $\varphi_{I1} = \varphi_{II1} = k = 1$ ; se satisfacen entonces (ver ecuación (3.16)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{Iy}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{Iz}}{\partial z} &= -\frac{Q_I}{J_I} y_G \quad (a) \\ \frac{\partial \tau_{IIy}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{IIz}}{\partial z} &= -\frac{Q_{II}}{J_{II}} y_G \quad (b) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Como dijimos  $J_I$  y  $J_{II}$  corresponden respectivamente a los valores de " $J^R$ " de las barras curvas homogéneas cuyas secciones son los subdominios I y II. A su vez  $Q_I$  y  $Q_{II}$ , son las fracciones de " $Q$ " que absorbe cada una de las zonas y evidentemente deberán verificar que:

$$Q_I + Q_{II} = Q \quad (3.42)$$

Imponemos la siguiente superposición:

Sector 1 (ver figuras 5 y 6)

$$\tau_y = \tau_{Iy} + \tau_{IIy} \quad (a) \quad ; \quad \tau_z = \tau_{Iz} + \tau_{IIz} \quad (b) \quad (3.43)$$

Sector 2 (ver figuras 5 y 6)

$$\tau_y = \tau_{IIy} \quad (a) \quad ; \quad \tau_z = \tau_{IIz} \quad (b) \quad (3.44)$$

De las ecuaciones (3.39) y (3.40), de acuerdo a las expresiones (3.41), (3.43) y (3.44), se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{Q_I}{J_I} + \frac{Q_{II}}{J_{II}} &= \frac{k_1 Q}{J^R} \quad (a) \\ \frac{Q_{II}}{J_{II}} &= \frac{k_2 Q}{J^R} \quad (b) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Entonces

$$\begin{aligned} Q_I &= (k_1 - k_2) \cdot \frac{J_I}{J^R} \cdot Q \quad (a) \\ Q_{II} &= k_2 \cdot \frac{J_{II}}{J^R} \cdot Q \quad (b) \end{aligned} \quad (3.46)$$

El valor de " $J^R$ " sabemos que corresponde a la sección total no homogénea de la barra curva bajo estudio. Sin embargo si imponemos la condición (3.42) también obtenemos que:

$$J^R = (k_1 - k_2) \cdot J_I + k_2 \cdot J_{II} \quad (3.47)$$

Es una manera indirecta de hallar el valor de " $J^R$ ".

Encontrados, entonces,  $Q_I$  y  $Q_{II}$ , y conocidos  $J_I$  y  $J_{II}$ , como dijimos, del **Ejemplo 11** disponemos de la distribución tensional de las zonas I y II. Por las superposiciones (3.43) y (3.44) hallamos el régimen de  $\tau_y$  y  $\tau_z$  para la sección rectangular hueca de dos capas de una barra curva gruesa. Como vimos el **MÉTODO I DE SUPERPOSICIÓN** simplifica notablemente el cálculo de las tensiones tangenciales. Debe pensarse que cada solución para un anillo rectangular homogéneo debe cumplir con las condiciones de equilibrio, simetría, reciprocidad en bordes externos, intermedios y comunes en 5 sectores (ver ejemplos 10 y 11). Si abordáramos el problema no homogéneo de dos capas, sin superposición, deberíamos en cambio, plantear las mismas condiciones, pero en 14 sectores (Figura 7).

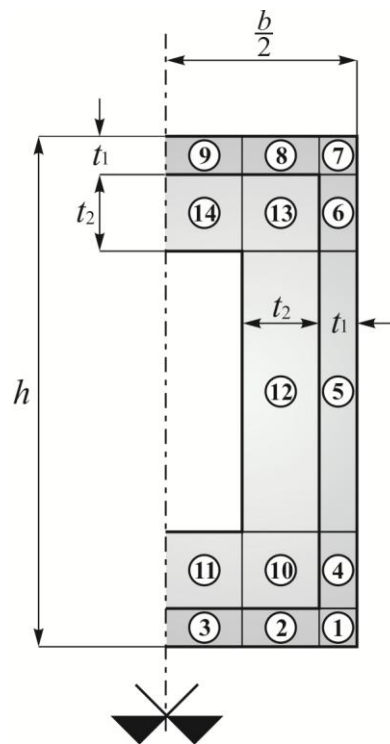


Figura 7

Finalmente recordemos que como en realidad estamos resolviendo la distribución de tensiones tangenciales de una barra curva gruesa pero por medio del **RESULTADO FUNDAMENTAL** (Sección 2.7) debemos aplicar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha r} &= \left(\frac{R}{r}\right)^2 \tau_y \quad (a) \\ \tau_{\alpha z} &= \left(\frac{R}{r}\right)^2 \tau_z \quad (b)\end{aligned}\tag{3.48}$$

El valor "R" del radio neutro se encuentra de acuerdo a la expresión (2.18).

*NOTA 3.3: En la Referencia [15] se desarrolla con el MÉTODO I DE SUPERPOSICIÓN una barra curva gruesa de sección rectangular hueca “composite” de tres capas.*

### 3.2 MÉTODO II DE SUPERPOSICIÓN

Cuando la función de distribución del módulo de Young dada por  $\varphi_1(y_G, z) = \varphi_1(y_G, -z)$  es arbitraria “a saltos” pero no satisface la restricción (3.17), todavía puede aplicarse una metodología más general de superposición de las tensiones tangenciales, que permite simplificar su búsqueda. De otra forma, es decir sin las superposiciones que estamos desarrollando, debería abordarse la distribución para la sección total, y aunque siempre es posible este planteo general, comportaría mayor laboriosidad.

El MÉTODO II DE SUPERPOSICIÓN se basa en dividir la sección en subdominios homogéneos de los cuales se conozca previamente su solución, para luego, adecuadamente, superponer los regímenes de tensión. Cuando se impongan las condiciones de equilibrio de la sección no homogénea bajo estudio, surgirá un sistema lineal de ecuaciones (en general, en las fracciones del esfuerzo de corte que cada subdivisión absorbe, consideradas como incógnitas), que permite resolver el problema.

El no cumplimiento de la condición (3.17) trae como principal consecuencia que cada subdominio y la sección total no tienen la misma coordenada " $y_G$ ". No disponiendo de esta facilidad, el sistema de ecuaciones surge de igualar los factores de las potencias sucesivas de " $y_G$ " comparando, como veremos, distintas ecuaciones de equilibrio. Entonces deberán emplearse mayor cantidad de subdominios que los estrictamente considerados “naturales”. Como la idea es sencilla y sería bastante engorroso exponer literalmente la propuesta, fijaremos la idea resolviendo dos ejemplos con el MÉTODO II DE SUPERPOSICIÓN.

- El primero corresponde a la barra recta gruesa con la sección que se ve en la Figura 8.

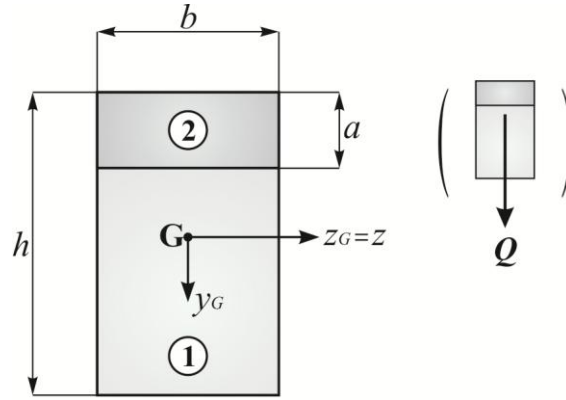


Figura 8

El Sector 1  $\left(-\left(\frac{h}{2}-a\right) \leq y_G \leq \frac{h}{2}\right)$  tiene

$$\varphi_1(y_G, z) = k_1 \quad (3.49)$$

El Sector 2  $\left(-\frac{h}{2} \leq y_G \leq -\left(\frac{h}{2}-a\right)\right)$  a su vez

$$\varphi_1(y_G, z) = k_2 \quad (3.50)$$

Las ecuaciones de equilibrio (recordar ecuación (1.26)) para cada sector son entonces para el único régimen tensional  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$ , las siguientes:

Sector 1

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{k_1 \cdot Q}{J^\infty} y \quad (3.51)$$

Sector 2

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{k_2 \cdot Q}{J^\infty} y \quad (3.52)$$

Recordemos que al no ser el eje neutro un eje baricéntrico se cumple que " $y = y_G - \Delta$ ", además " $J^\infty$ " corresponde a la sección total no homogénea y por " $Q$ " indicamos el esfuerzo de corte aplicado.

Obsérvese también, que al superponer tensiones de subdominios homogéneos cuyo comportamiento se conocen e imponer las ecuaciones (3.51) y (3.52), se deberán verificar para satisfacerlas, la nulidad de los factores de polinomios en " $y_G$ " (en este ejemplo serán de hasta primer grado).

Consideraremos los siguientes tres subdominios (Figura 9):

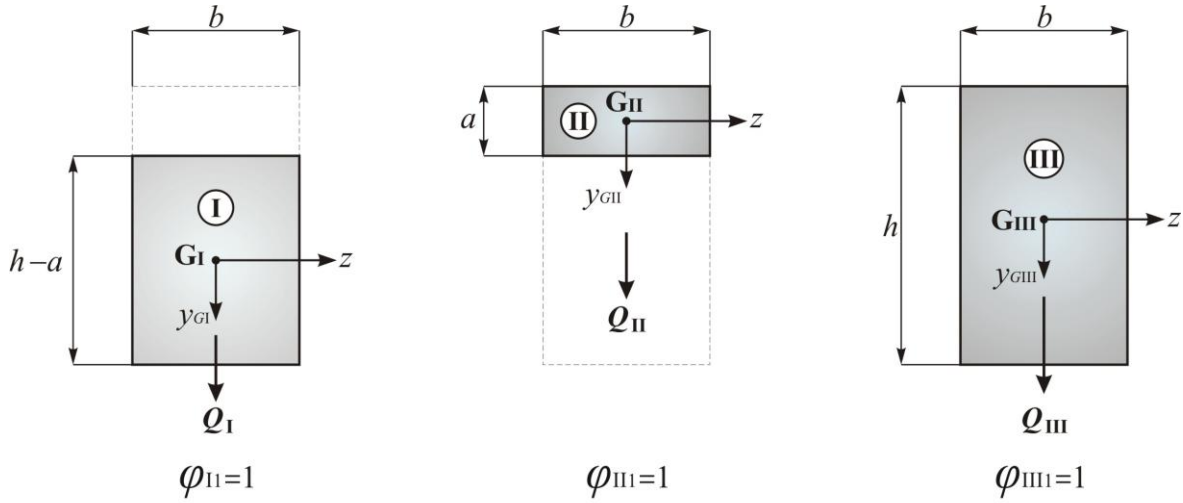


Figura 9

La idea es tomar los subdominios homogéneos I y II que corresponden “naturalmente” a los sectores de la sección bajo estudio. El III, es la unión de los dos anteriores que en este caso es la sección rectangular total pero homogénea. En realidad, como veremos en el segundo ejemplo de este ítem, siempre deben tomarse los “naturales” más los que surjan de unir éstos de dos en dos en orden creciente. Cada subdominio absorbe una fracción del esfuerzo de corte que evidentemente, para que la superposición que estamos describiendo sea válida, deben verificar que:

$$Q_I + Q_{II} + Q_{III} = Q \quad (3.53)$$

En cada subdominio rectangular homogéneo  $\phi_{I1} = \phi_{II1} = \phi_{III1} = 1$  se verifica que

$$\Delta_I = \Delta_{II} = \Delta_{III} = 0 \quad (3.54)$$

y entonces

$$y_j = y_{G_j} \quad (j = I, II, III) \quad (3.55)$$

Se cumple que

$$y_{G_j} = y_G + \delta_j \quad (j = I, II, III) \quad (3.56)$$

siendo

$$\delta_I = -\frac{a}{2} \quad ; \quad \delta_{II} = \frac{h-a}{2} \quad ; \quad \delta_{III} = 0 \quad (3.57)$$

En cada uno de los subdominios I, II y III (rectángulos homogéneos de barras rectas gruesas) se verifican las siguientes ecuaciones diferenciales de equilibrio:

$$\frac{\partial \tau_{jxy}}{\partial y_j} + \frac{\partial \tau_{jxz}}{\partial z} = -\frac{Q_j}{J_{Gj}} y_j \quad (3.58)$$

$$(j = \text{I, II, III})$$

donde

$$J_{GI} = \frac{b \cdot (h-a)^3}{12} \quad ; \quad J_{GII} = \frac{b \cdot a^3}{12} \quad ; \quad J_{GIII} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (3.59)$$

Proponiendo la siguiente superposición para las tensiones en ambos sentidos

Sector 1

$$\tau = \tau_I + \tau_{III} \quad (3.60)$$

Sector 2

$$\tau = \tau_{II} + \tau_{III} \quad (3.61)$$

Planteando las dos ecuaciones (3.51) y (3.52), teniendo en cuenta (3.60) y (3.61) y las ecuaciones (3.58), se deben cumplir las cuatro ecuaciones siguientes al igualar polinomios en " $y_G$ ":

$$\begin{aligned} \frac{Q_I}{J_{GI}} + \frac{Q_{III}}{J_{GIII}} - \frac{k_1 Q}{J^\infty} &= 0 & (a) \\ \frac{Q_I}{J_{GI}} \cdot \delta_I + \frac{Q_{III}}{J_{GIII}} \cdot \delta_{III} + \frac{k_1 Q}{J^\infty} \cdot \Delta &= 0 & (b) \\ \frac{Q_{II}}{J_{GII}} + \frac{Q_{III}}{J_{GIII}} - \frac{k_2 Q}{J^\infty} &= 0 & (c) \\ \frac{Q_{II}}{J_{GII}} \cdot \delta_{II} + \frac{Q_{III}}{J_{GIII}} \cdot \delta_{III} + \frac{k_2 Q}{J^\infty} \cdot \Delta &= 0 & (d) \end{aligned} \quad (3.62)$$

El sistema (3.62) es un sistema lineal de ecuaciones en las incógnitas  $Q_I$ ,  $Q_{II}$ ,  $Q_{III}$  y  $\Delta$ . Si todavía incluimos la condición global de equilibrio (3.53) podremos, adicionalmente, hallar " $J^\infty$ ". Cabe aclarar que " $\Delta$  y  $J^\infty$ " podrían calcularse directamente por las expresiones (1.18) y (1.20), por lo cual si fueran conocidas "a priori", dos ecuaciones cualesquiera de las (3.53) y (3.62) serían combinación de las tres restantes, y las únicas incógnitas serían  $Q_I$ ,  $Q_{II}$  y  $Q_{III}$ . Una vez que éstas se conocen estamos en condiciones de escribir las expresiones de  $\tau_{jxy}$  y  $\tau_{jxz}$  ( $j = \text{I, II, III}$ ). Por medio de la solución previa para secciones rectangulares homogéneas de barras rectas gruesas (Ejemplo 2), sabemos que:

$$\tau_{jxy} = \frac{Q_j h_j^2}{8J_{Gj}} \left[ 1 - \left( \frac{2y_{Gj}}{h_j} \right)^2 \right] \quad (a)$$

$$\tau_{jxz} = 0 \quad (b)$$

$$(j = I, II, III)$$
(3.63)

donde

$$h_I = h - a \quad ; \quad h_{II} = a \quad ; \quad h_{III} = h \quad (3.64)$$

Por (3.60) y (3.61) se completa la búsqueda del régimen tensional en la sección no homogénea “a saltos”. Obsérvese que las condiciones de reciprocidad tanto en las fronteras externas como en la común se verifican idénticamente, debido a la metodología empleada de superposición y selección de los tres subdominios.

▪ El segundo ejemplo a resolver con el presente MÉTODO II DE SUPERPOSICIÓN, es encontrar el régimen de las tensiones tangenciales en una barra curva gruesa (tratada como barra recta ficticia) con la sección rectangular dada en la Figura 10.

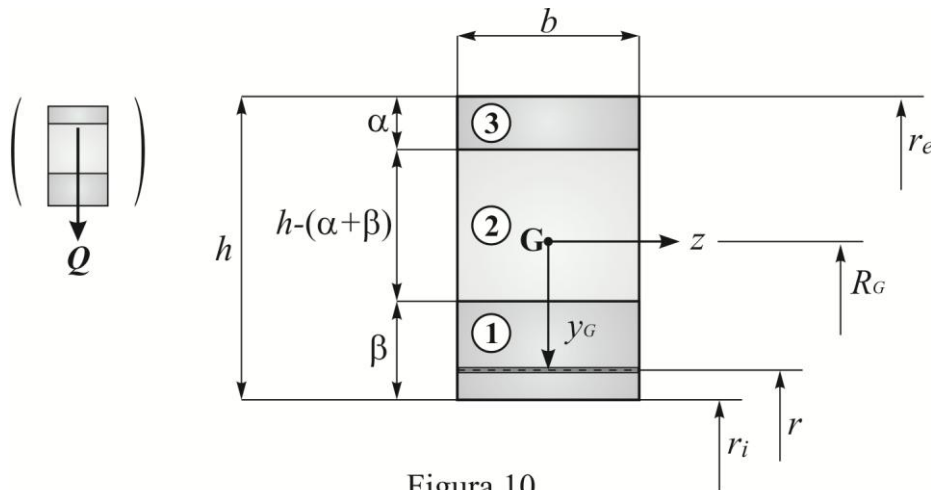


Figura 10

La distribución “a saltos” del módulo de elasticidad dado por  $\varphi_1(y_G, z)$ , es la siguiente:

El Sector 1  $\left( \left( \frac{h}{2} - \beta \right) \leq y_G \leq \frac{h}{2} \right)$  tiene

$$\varphi_1(y_G, z) = k_1 \quad (3.65)$$

El Sector 2  $\left( -\left( \frac{h}{2} - \alpha \right) \leq y_G \leq \left( \frac{h}{2} - \beta \right) \right)$  a su vez

$$\varphi_1(y_G, z) = k_2 \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \text{El Sector 3 } \left( -\frac{h}{2} \leq y_G \leq -\left(\frac{h}{2} - \alpha\right) \right) \\ \varphi_1(y_G, z) = k_3 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Nos basaremos, entonces, en el RESULTADO FUNDAMENTAL (sección 2.7) de utilizar una barra recta gruesa ficticia, para resolver la barra curva gruesa.

Las ecuaciones de equilibrio de la sección total no homogénea son, para el único régimen tensional total  $\tau_y$  y  $\tau_z$ , las siguientes (recordar ecuación (2.72)).

Sector 1

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = \frac{k_1 \cdot Q}{J^R} (\mathcal{K} - y_G) \quad (3.68)$$

Sector 2

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = \frac{k_2 \cdot Q}{J^R} (\mathcal{K} - y_G) \quad (3.69)$$

Sector 3

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = \frac{k_3 \cdot Q}{J^R} (\mathcal{K} - y_G) \quad (3.70)$$

Siendo " $J^R$ " el parámetro calculado para la sección bajo estudio con la expresión (2.20) y a su vez  $\mathcal{K}$  por la (2.74)

$$\mathcal{K} = R_G - \mathcal{K}^* = R_G - \left( R + \frac{\alpha_2^R}{R\alpha_0^R} \right) \quad (3.71)$$

donde " $R_G$ " es el radio baricéntrico de la barra curva gruesa y " $R$ ,  $\alpha_0^R$  y  $\alpha_2^R$ " pueden calcularse con las expresiones (2.17), (2.18) y (2.19).

Con la regla utilizada en el ejemplo previo, los subdominios rectangulares homogéneos adoptados son los indicados a continuación (Figura 11):



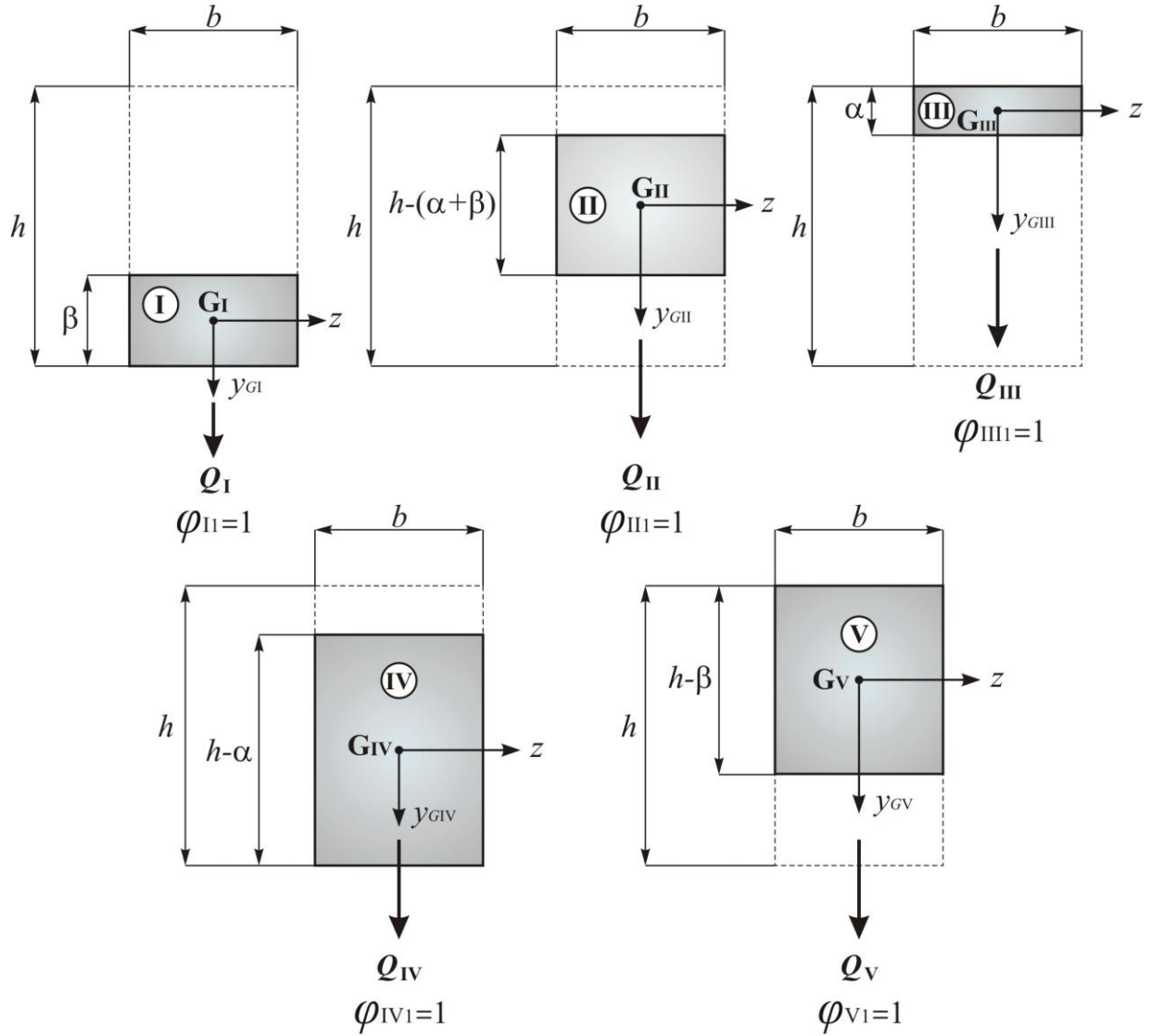


Figura 11

Los subdominios I, II y III son los “naturales” de acuerdo a la sección que estudiamos. En cambio IV y V son subdominios que se generan uniendo de dos en dos los tres primeros en orden creciente. A su vez, cada subdominio homogéneo absorbe una correspondiente fracción del esfuerzo de corte; se cumplirá entonces que:

$$Q_I + Q_{II} + Q_{III} + Q_{IV} + Q_V = Q \quad (3.72)$$

No debe olvidarse que al estar tratando la barra curva como una barra recta ficticia gruesa, cada uno de los cinco subdominios rectangulares homogéneos a superponer, también

deben considerarse como barras rectas ficticias gruesas y satisfacer sus particulares ecuaciones de equilibrio.

Es decir para cada subdominio homogéneo (secciones de barras curvas con radios baricéntricos  $R_{GI}$ ,  $R_{GII}$ ,  $R_{GIII}$ ,  $R_{GIV}$  y  $R_{GV}$  respectivamente), y donde  $\varphi_{I1} = \varphi_{III1} = \varphi_{III1} = \varphi_{IV1} = \varphi_{V1} = k = 1$ , las ecuaciones de equilibrio como barras rectas ficticias con (ver exp. (2.76) con NOTA 1.3)

$$\mathcal{K}_j = 0 \quad (j = I, II, III, IV, V) \quad (3.73)$$

son las que siguen (ecuación (2.72))

$$\frac{\partial \tau_{jy}}{\partial y_{Gj}} + \frac{\partial \tau_{jz}}{\partial z} = -\frac{Q_j}{J_j^R} y_{Gj} \quad (3.74)$$

$$(j = I, II, III, IV, V)$$

siendo a su vez:

$$y_{Gj} = y_G + \delta_j \quad (a) \quad ; \quad R_{Gj} = R_G + \delta_j \quad (b) \quad (3.75)$$

$$(j = I, II, III, IV, V)$$

y donde:

$$\delta_I = \frac{\beta - h}{2} ; \delta_{II} = \frac{\beta - \alpha}{2} ; \delta_{III} = \frac{h - \alpha}{2} ; \delta_{IV} = -\frac{\alpha}{2} ; \delta_V = \frac{\beta}{2} \quad (3.76)$$

y los " $J_j^R$ " ( $j = I, II, III, IV$  y  $V$ ), son los parámetros dados en la teoría de barras curvas gruesas por la expresión (2.20) para cada rectángulo homogéneo de radio baricéntrico " $R_{Gj}$ " ( $j = I, II, III, IV$  y  $V$ ). De todas maneras los valores de cada " $J_j^R$ ", surgirán indirectamente al aplicar la superposición que nos ocupa y que proponemos como sigue (genéricamente tanto para el sentido "y" como para el "z"):

Sector 1

$$\tau = \tau_I + \tau_{IV} \quad (3.77)$$

Sector 2

$$\tau = \tau_{II} + \tau_{IV} + \tau_V \quad (3.78)$$

Sector 3

$$\tau = \tau_{III} + \tau_V \quad (3.79)$$

Planteando las ecuaciones (3.68), (3.69) y (3.70), teniendo en cuenta la superposición propuesta dada por (3.77), (3.78) y (3.79), imponiendo el cumplimiento de las (3.74) e igualando los polinomios resultantes en " $y_G$ " obtenemos el sistema de las seis ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
& \frac{Q_I}{J_I^R} + \frac{Q_{IV}}{J_{IV}^R} - \frac{k_1 Q}{J^R} = 0 \quad (a) \\
& \frac{Q_I}{J_I^R} \cdot \delta_I + \frac{Q_{IV}}{J_{GIV}^R} \cdot \delta_{IV} + \frac{k_1 Q}{J^R} \cdot \mathcal{K} = 0 \quad (b) \\
& \frac{Q_{II}}{J_{II}^R} + \frac{Q_{IV}}{J_{IV}^R} + \frac{Q_V}{J_V^R} - \frac{k_2 Q}{J^R} = 0 \quad (c) \\
& \frac{Q_{II}}{J_{II}^R} \cdot \delta_{II} + \frac{Q_{IV}}{J_{GIV}^R} \cdot \delta_{IV} + \frac{Q_V}{J_{GV}^R} \cdot \delta_V + \frac{k_2 Q}{J^R} \cdot \mathcal{K} = 0 \quad (d) \\
& \frac{Q_{III}}{J_{III}^R} + \frac{Q_V}{J_V^R} - \frac{k_3 Q}{J^R} = 0 \quad (e) \\
& \frac{Q_{III}}{J_{III}^R} \cdot \delta_{III} + \frac{Q_V}{J_{GV}^R} \cdot \delta_V + \frac{k_3 Q}{J^R} \cdot \mathcal{K} = 0 \quad (f)
\end{aligned} \tag{3.80}$$

De este sistema (3.80) obtenemos los valores de " $Q_j$  ( $j = I, II, III, IV, V$ ) y  $\mathcal{K}$ " (como dijimos esta última podría hallarse directamente con la teoría de barras rectas ficticias gruesas no homogéneas). Como estos valores de " $Q_j$  ( $j = I, II, III, IV, V$ )" dependen de " $J^R$ " podríamos imponer el equilibrio global (3.72) y hallarlo, también, indirectamente.

El problema de la búsqueda del régimen tensional tangencial está terminado. En efecto. Recurriendo y adecuando al Ejemplo 16, de barras rectas ficticias gruesas de sección rectangular homogénea, sabemos que:

$$\begin{aligned}
\tau_{jy} &= \frac{Q_j h_j^2}{8J_j^R} \left[ 1 - \left( \frac{2y_{Gj}}{h_j} \right)^2 \right] \quad (a) \\
\tau_{jz} &= 0 \quad (b) \\
& (j = I, II, III, IV, V)
\end{aligned} \tag{3.81}$$

y donde claramente tenemos que:

$$h_I = \beta ; h_{II} = h - (\alpha + \beta) ; h_{III} = \alpha ; h_{IV} = h - \alpha ; h_V = h - \beta \tag{3.82}$$

Luego para hallar las tensiones  $\tau_y$  y  $\tau_z$  de la barra recta ficticia gruesa no homogénea, utilizamos la superposición (3.77), (3.78) y (3.79), con los valores de  $Q_j$  ( $j = I, II, III, IV, V$ ) obtenidos de (3.80).

Finalmente de acuerdo al **RESULTADO FUNDAMENTAL**, (Sección 2.7) las tensiones tangenciales de la barra curva gruesa de sección rectangular no homogénea serán:

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha r} &= \left(\frac{R}{r}\right)^2 \tau_y \quad (a) \\ \tau_{\alpha z} &= \left(\frac{R}{r}\right)^2 \tau_z \quad (b)\end{aligned}\tag{3.83}$$

Estos ejemplos indican cómo afrontando barras gruesas no homogéneas, el **MÉTODO II DE SUPERPOSICIÓN** facilita la manipulación algebraica.

Por último destacamos que si "N" es el número de sectores con distinto módulo de Young (constante sector a sector), se deben tomar una total de "(2N – 1)" subdominios homogéneos de resolución conocida: los "N" naturales bajo estudio de la sección básica, a los que debemos adicionar los restantes que cubren éstos de dos en dos en sentido creciente.

De nuevo, resolver este caso directamente, sería prácticamente accesible, y tal vez no hubiera sido necesario utilizar el **MÉTODO II DE SUPERPOSICIÓN**. En todo caso, considérese el desarrollo como una forma de clarificar la metodología.



PARTE CUARTA  
TENSIONES TANGENCIALES QUE SATISFACEN  
LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO

4. GENERALIDADES

Conocer la distribución de las tensiones tangenciales sobre las secciones de las barras gruesas es fundamental, puesto que con ella puede encontrarse el factor de corte " $m$ ", pilar central dentro de estas teorías, que permite disponer de todos los coeficientes en el sistema diferencial de movimiento.

Dicha distribución puede considerarse siempre como la suma de una solución "Homogénea" ( $\tau^H$ )—considerando  $\varphi_1(y_G, z)=0$ — más una solución "Particular" ( $\tau^P$ ) que depende esencialmente de la distribución del módulo de elasticidad a través de la función " $\varphi_1(y_G, z)$ ". Debido a la arbitrariedad de esta función se infiere que no siempre la solución particular es de fácil viabilidad. Cuando ejemplifiquemos con secciones no homogéneas se observará la diversidad de las soluciones particulares posibles.

Como ambas soluciones satisfacen la ecuación de equilibrio, una sin término independiente y la otra con él, y por tratarse de un problema lineal, la suma de ambas verificará el equilibrio que todo problema requiere. La suma sólo deberá satisfacer las CB, es decir el cumplimiento en la sección de la reciprocidad en las fronteras externas e internas, de la continuidad de las tensiones tangenciales perpendiculares a los bordes en las fronteras comunes y de las condiciones de simetría que cada problema eventualmente exija.

En general la solución varía dependiendo del tipo estructural que analicemos: (1) Barras rectas gruesas, (2) Barras curvas gruesas y (3) Barras rectas ficticias gruesas.

A- ALGUNAS SOLUCIONES HOMOGÉNEAS

Algunas soluciones homogéneas, como dijimos independientes de " $\varphi_1(y_G, z)$ ", serán descritas a continuación. Recordemos que en todos los casos dentro de la RM, se trata de resolver una ecuación diferencial de equilibrio, en general con dos funciones incógnitas que son las componentes tangenciales del tensor de tensiones en sentido de las direcciones ortogonales " $y$ " y " $z$ ". Esto es. Podremos encontrar, entonces, más de una posible solución homogénea (en realidad existen infinitas) ya que se trata de una problema teóricamente indeterminado. Sólo indicaremos unas pocas para cada tipo de barra; serán las suficientes para abordar los futuros ejemplos que presentaremos.

A continuación recordamos las ecuaciones diferenciales de equilibrio sin término independiente y algunas soluciones homogéneas para cada caso.

▪ **BARRAS RECTAS GRUESAS**

Si " $y_G$ " es la coordenada sobre el eje de simetría de la sección medida desde el baricentro, con " $y_G = \Delta + y$ " (recordar (1.16)), siendo " $y$ " la coordenada sobre el eje de simetría medida desde "D", vemos que la ecuación (1.26) sin término independiente vale indistintamente:

$$\frac{\partial \tau_{xy}^H}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^H}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}^H}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{xz}^H}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

Algunas de las soluciones, con  $F(\bullet)$  y  $g(\bullet)$  funciones suaves arbitrarias, son:

$$\begin{aligned} (a): \quad \tau_{xy}^H &= F(z) & ; \quad \tau_{xz}^H &= 0 \\ (b): \quad \tau_{xy}^H &= 0 & ; \quad \tau_{xz}^H &= g(y_G) \\ (c): \quad \tau_{xy}^H &= g(y_G) & ; \quad \tau_{xz}^H &= -z \cdot g'(y_G) \\ (d): \quad \tau_{xy}^H &= -y_G \cdot F'(z) & ; \quad \tau_{xz}^H &= F(z) \\ (e): \quad \tau_{xy}^H &= g(y_G) \cdot F'(z) & ; \quad \tau_{xz}^H &= -g'(y_G) \cdot F(z) \end{aligned} \quad (4.2)$$

La (e) incluye al resto. La combinación lineal de ellas es también una solución.

▪ **BARRAS CURVAS GRUESAS**

Hay varias formas equivalentes de escribir la ecuación (2.26) recordando que " $r = R - y = R_G - y_G$ ", donde " $R$ " es el radio neutro, " $R_G$ " el baricéntrico e " $y$ " e " $y_G$ " las coordenadas medidas respectivamente desde "D" y "G" sobre el eje de simetría de la sección. O sea sin considerar el término independiente tenemos indistintamente:

$$\begin{aligned} r \cdot \left( \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial r} - \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} \right) + 2\tau_{\alpha r} &= (R - y) \cdot \left( \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} \right) - 2\tau_{\alpha r} = \\ &= (R_G - y_G) \cdot \left( \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} \right) - 2\tau_{\alpha r} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por supuesto todavía podrían combinarse las coordenadas y obtener otras.

Algunas de las soluciones, siendo " $p$ " real y  $F(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  funciones suaves arbitrarias, son:

$$\begin{aligned}
(a): \quad \tau_{\alpha r}^H &= \frac{F(z)}{(R_G - y_G)^2} & ; \quad \tau_{\alpha z}^H &= 0 \\
(b): \quad \tau_{\alpha r}^H &= 0 & ; \quad \tau_{\alpha z}^H &= g(y_G) \\
(c): \quad \tau_{\alpha r}^H &= g(y_G) & ; \quad \tau_{\alpha z}^H &= -z \cdot \left[ g'(y_G) - \frac{2 \cdot g(y_G)}{R_G - y_G} \right] \\
(d): \quad \tau_{\alpha r}^H &= (R_G - y_G)^p \cdot F'(z) & ; \quad \tau_{\alpha z}^H &= (p+2) \cdot (R_G - y_G)^{p-1} \cdot F(z) \\
(e): \quad \tau_{\alpha r}^H &= \frac{g(y_G) \cdot F'(z)}{(R_G - y_G)^2} & ; \quad \tau_{\alpha z}^H &= -\frac{g'(y_G) \cdot F(z)}{(R_G - y_G)^2}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Observemos que no todas son independientes y que la combinación lineal es también solución de la ecuación homogénea de equilibrio.

#### ▪ BARRAS RECTAS FICTICIAS GRUESAS

En esta teoría se resuelven barras curvas gruesas abordando barras rectas ficticias gruesas –nuestro “RESULTADO FUNDAMENTAL”–. Las ecuaciones de equilibrio recordando que " $R - y = R_G - y_G$ ", partiendo de la expresión (2.72) sin considerar término independiente, son:

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = \frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0 \tag{4.5}$$

Las soluciones que presentamos son formalmente idénticas a las correspondientes a las de barras rectas vistas más arriba y siempre con  $F(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  funciones suaves arbitrarias, son:

$$\begin{aligned}
(a): \quad \tau_y^H &= F(z) & ; \quad \tau_z^H &= 0 \\
(b): \quad \tau_y^H &= 0 & ; \quad \tau_z^H &= g(y_G) \\
(c): \quad \tau_y^H &= g(y_G) & ; \quad \tau_z^H &= -z \cdot g'(y_G) \\
(d): \quad \tau_y^H &= -y_G \cdot F'(z) & ; \quad \tau_z^H &= F(z) \\
(e): \quad \tau_y^H &= g(y_G) \cdot F'(z) & ; \quad \tau_z^H &= -g'(y_G) \cdot F(z)
\end{aligned} \tag{4.6}$$



## B- SOLUCIONES PARTICULARES PARA SECCIONES CON ÚNICO MÓDULO DE YOUNG ( $\varphi_1(y_G, z) = k$ ).

Como expresamos más arriba, no siempre es sencillo hallar una solución particular, cuando la distribución del módulo de elasticidad es una alternativa arbitraria. A continuación sólo detallaremos para los tres tipos estructurales, una solución particular en secciones donde " $E(y_G, z) = k \cdot E_0$ " ( $k$  es una constante real positiva), es decir " $\varphi_1(y_G, z) = k$ ":

### ▪ BARRAS RECTAS GRUESAS

Si el material de la sección es homogéneo, o se cumple (3.17) recordando NOTA 1.3, se verifica que:

$$\Delta = 0 \quad (4.7)$$

con lo cual resulta  $y_G = y$  (ver (1.16)).

Entonces la ecuación de equilibrio dada por la ecuación (1.26) valdrá:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -k \cdot \frac{y_G}{J^\infty} \cdot Q \quad (4.8)$$

Además en este caso " $J^\infty = J_G$ ".

Una solución particular, denominando como " $C$ " a una constante arbitraria, es por ejemplo:

$$\tau_{xy}^P = -\frac{k}{J_G} \cdot Q \cdot C \cdot \frac{y_G^2}{2} \quad ; \quad \tau_{xz}^P = -\frac{k}{J_G} \cdot Q \cdot (1-C) \cdot z \cdot y_G \quad (4.9)$$

### ▪ BARRAS CURVAS GRUESAS

Para el caso que nos ocupa,  $\varphi_1(y_G, z) = k$ , y de acuerdo a la NOTA 2.3, se cumple que

$$U = -V R_G \quad (4.10)$$

por lo tanto la ecuación de equilibrio (2.26), es

$$r \cdot \left( \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial r} - \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} \right) + 2\tau_{\alpha r} = k \cdot V \cdot \left( 1 - \frac{R_G}{r} \right) \cdot Q \quad (4.11)$$

Considerando el cambio de coordenadas tendremos otras ecuaciones de equilibrio equivalentes.

Recordemos también que

$$V = -\frac{R^2}{J^R} \quad (4.12)$$

donde  $R$  y  $J^R$  son parámetros físico-geométricos de la sección de la barra curva gruesa.

Una solución particular posible, siendo  $\mu$  y  $\nu$  dos constantes arbitrarias, es, entonces, la siguiente:

$$\tau_{\alpha r}^P = kV \left( \frac{\nu}{2} - \frac{\mu R_G}{r} \right) \cdot Q \quad ; \quad \tau_{\alpha z}^P = k \cdot \frac{Vz}{r} \left[ (1-\mu) \cdot \frac{R_G}{r} - (1-\nu) \right] \cdot Q \quad (4.13)$$

▪ **BARRAS RECTAS FICTICIAS GRUESAS**

Escribimos la ecuación de equilibrio (2.72) para este tipo estructural y para un módulo de elasticidad constante, " $E(y_G, z) = k \cdot E_0$ ", o sea:

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = -k \cdot \frac{y_G}{J^R} \cdot Q \quad (4.14)$$

ya que para este caso se verifica que  $\mathcal{K} = \Delta = 0$  (recordar nuevamente NOTA 1.3).

Una solución particular viable, si " $D$ " es una constante arbitraria, es:

$$\tau_y^P = -\frac{k}{J^R} \cdot Q \cdot D \cdot \frac{y_G^2}{2} \quad ; \quad \tau_z^P = -\frac{k}{J^R} \cdot Q \cdot (1-D) \cdot z \cdot y_G \quad (4.15)$$

" $R$ " y " $J^R$ " son respectivamente el radio neutro y el momento de inercia material de la sección de una barra curva, pero, que abordamos por medio del RESULTADO FUNDAMENTAL (ítem 2.7) a través de la teoría de barras rectas ficticias gruesas.



## PARTE QUINTA

### APLICACIONES

Nos ocuparemos de dos tipos de aplicaciones para los distintos tipos de barras gruesas con diversas formas de la sección transversal:

La APLICACIÓN 1 se ocupa de la distribución de tensiones tangenciales y factor de corte.

En esta APLICACIÓN incluiremos una serie de ejemplos para encontrar la distribución de las tensiones tangenciales en barras gruesas de todo tipo. Son complementados con algunos casos desarrollados en el texto previo y con cierta bibliografía afín del autor.

En efecto.

En la PARTE TERCERA se resuelven por medio del MÉTODO I DE SUPERPOSICIÓN:

- Una barra recta gruesa no homogénea cuya sección se muestra en la Figura 3.
- Una barra curva gruesa de sección rectangular hueca de dos (2) capas utilizando la teoría equivalente de barras rectas ficticias (RESULTADO FUNDAMENTAL).

En la mencionada parte, se abordan además, utilizando el MÉTODO II DE SUPERPOSICIÓN:

- Una barra recta gruesa de sección rectangular no homogénea con dos (2) subdominios de igual ancho (Figura 8).
- Una barra curva gruesa con tres (3) subdominios de igual ancho y distinta altura y material (Figura 10) recurriendo a la teoría de barras rectas ficticias por medio del RESULTADO FUNDAMENTAL.

En la Referencia [15], como ya señalamos, se utiliza el MÉTODO I DE SUPERPOSICIÓN para determinar las tensiones tangenciales y factor de corte en una barra curva gruesa de sección rectangular hueca “composite” de tres capas.

Cabe consignar adicionalmente que, si bien contamos con el TEOREMA GENERAL, algunos ejemplos desarrollados y resueltos, se abordan por más de una teoría, sin recurrir a la enorme simplificación que la aplicación del TEOREMA significaría. Esto es. Algunos tipos de secciones y no homogeneidades están tratadas con dos teorías distintas de barras. Se hace para fijar ideas, cuando, insistimos el TEOREMA GENERAL nos eximiría de la repetición de tareas.

La APLICACIÓN 2, por otro lado, se ocupa del cálculo de frecuencias naturales para este tipo de barras gruesas.

## APLICACIÓN 1: TENSIONES TANGENCIALES Y FACTOR DE CORTE EN BARRAS GRUESAS

### APLICACIÓN 1.1. TENSIONES TANGENCIALES Y FACTOR DE CORTE EN BARRAS RECTAS GRUESAS

- Ejemplo 1: BARRA RECTA DE SECCIÓN TRAPEZOIDAL HOMOGÉNEA.

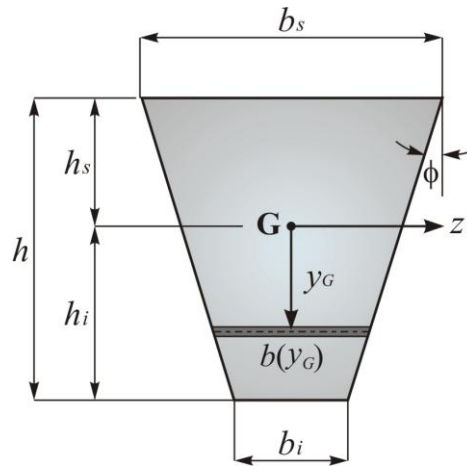


Figura Ej.1

Tenemos (Figura Ej.1)

$$\varphi_j(y_G, z) = 1 \quad (j=1, 2, 3) \quad (\text{E1.1})$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} E(y_G, z) &= E_0 \quad ; \quad G(y_G, z) = G_0 \quad ; \quad \rho(y_G, z) = \rho_0 \quad ; \quad \Delta = 0 \\ A^\infty &= \alpha_0^\infty = \beta_0^\infty = \Omega \quad ; \quad \alpha_2^\infty = \beta_2^\infty = J_G^\infty = J_G \quad ; \quad \alpha_1^\infty = \beta_1^\infty = 0 \end{aligned} \quad (\text{E1.2})$$

siendo

$$\Omega = (b_i + b_s) \cdot \frac{h}{2} \quad ; \quad J_G = \frac{h^3}{36} \cdot \frac{(b_i^2 + b_s^2 + 4b_i b_s)}{b_i + b_s} \quad (\text{E1.3})$$

Además:

$$\begin{aligned} b(y_G) &= -2T \cdot y_G + \frac{2}{3} \cdot \frac{(b_i^2 + b_s^2 + b_i b_s)}{b_i + b_s} \\ 2b(y_G) &= S - T \cdot y_G \end{aligned} \quad (\text{E1.4})$$

donde

$$S = \frac{b_s}{2} - T \cdot h_s \quad ; \quad T = \text{tg} \phi = \frac{b_s - b_i}{2h} \quad (\text{E1.5})$$

Ahora bien las tensiones tangenciales que surgen debido a un esfuerzo de corte  $Q = Q_y$  aplicado a la sección, deben satisfacer las CB, (o sea Condiciones de Reciprocidad de las componentes normales al contorno) sobre las fronteras externas de la sección, o sea:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(-h_s, z) &= \tau_{xy}(h_i, z) = 0 \\ \tau_{xy}\left(y_G, \frac{1}{2}b(y_G)\right) \cdot \sin\phi + \tau_{xz}\left(y_G, \frac{1}{2}b(y_G)\right) \cdot \cos\phi &= 0 \end{aligned} \quad (E1.6)$$

donde

$$h_s = \frac{h}{3} \cdot \frac{(2b_i + b_s)}{b_i + b_s} \quad ; \quad h_i = \frac{h}{3} \cdot \frac{(2b_s + b_i)}{b_i + b_s} \quad (E1.7)$$

De acuerdo a lo presentado en la PARTE CUARTA proponemos las siguientes expresiones para las tensiones:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^H &= g(y_G) \quad ; \quad \tau_{xz}^H = -z \cdot g'(y_G) \\ \tau_{xy}^P &= 0 \quad ; \quad \tau_{xz}^P = -\frac{Q}{J_G} \cdot z \cdot y_G \end{aligned} \quad (E1.8)$$

que satisfacen idénticamente la ecuación diferencial de equilibrio interno dada por (1.26).

Entonces de acuerdo a las (E1.6) obtenemos la siguiente ecuación diferencial de primer orden en  $g(y_G)$  con sus Condiciones de Borde:

$$\begin{aligned} g' + \frac{T}{T \cdot y_G - S} \cdot g + \frac{Q}{J_G} \cdot y_G &= 0 \\ g(-h_s) &= g(h_i) = 0 \end{aligned} \quad (E1.9)$$

La solución del problema (E1.9) da lugar a que:

$$g(y_G) = \frac{6R + 2T \cdot y_G^3 - 3S \cdot y_G^2}{6(S - T \cdot y_G)} \cdot \frac{Q}{J_G} \quad (E1.10)$$

donde denominamos como:

$$6R = h_s^2 (2T \cdot h_s + 3S) = h_i^2 (-2T \cdot h_i + 3S) \quad (E1.11)$$

Hemos finalizado entonces, la distribución de las tensiones tangenciales en la sección trapezoidal homogénea, es decir:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu_1(y_G, z) \cdot Q \\ \tau_{xz} &= \mu_2(y_G, z) \cdot Q \end{aligned} \quad (E1.12)$$

siendo

$$\begin{aligned}\mu_1(y_G, z) &\equiv \mu_1(y_G) \equiv \frac{6R + 2T \cdot y_G^3 - 3S \cdot y_G^2}{6J_G(S - T \cdot y_G)} \\ \mu_2(y_G, z) &\equiv -T \cdot z \cdot \mu_1(y_G)\end{aligned}\quad (E1.13)$$

Estamos en condiciones de calcular el factor de corte " $m$ " que como sabemos vale (recordar (1.34)):

$$m \equiv A^\infty \iint_{\Omega} [\mu_1^2(y_G) + \mu_2^2(y_G, z)] d\Omega \quad (E1.14)$$

NOTA: Por ejemplo si  $b_i = 10$ ,  $b_s = 30$ ,  $h = 40$  tenemos que  $m = 1.22856$

La sección rectangular es un caso particular de la trapezoidal y que mostraremos en el Ejemplo 2.

- **Ejemplo 2:** BARRA RECTA DE SECCIÓN RECTANGULAR HOMOGÉNEA. (Ver Figura Ej.2).

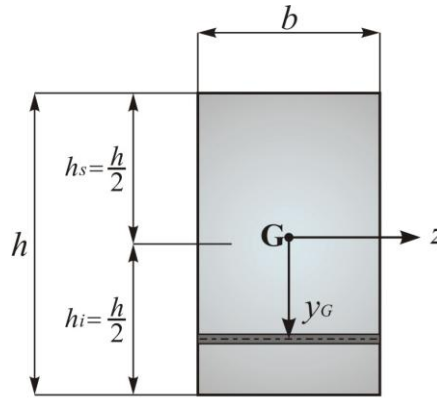


Figura Ej.2

Recordemos que  $\varphi_j(y_G, z) = 1$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Imponiendo en la sección trapezoidal del Ejemplo 1 que  $b_i = b_s = b(y_G) = b$  y observando que en este caso  $h_s = h_i = \frac{h}{2}$  con lo cual  $T = 0$ ,  $\Omega = bh$ ,  $J_G = \frac{bh^3}{12}$ ,  $\Delta = 0$ ,  $S = \frac{b}{2}$ ,  $R = \frac{bh^2}{16}$  y entonces reemplazando en (E1.13) y observando (E1.12) obtenemos:

$$\begin{aligned}\mu_1(y_G) &= \frac{3}{2\Omega} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2y_G}{h} \right)^2 \right] \\ \mu_2(y_G, z) &= 0\end{aligned}\quad (E2.1)$$

que coincide con la expresión clásica de Collignon donde  $\tau_{xz} = 0$ .

En este caso de una barra recta gruesa de sección rectangular homogénea el factor de corte " $m$ " vale para todo  $b$  y  $h$ :

$$m = \frac{6}{5} = 1.2 \quad (\text{E2.2})$$

- **Ejemplo 3:** BARRA RECTA DE SECCIÓN RECTANGULAR HUECA HOMOGÉNEA. (Ver Figura Ej.3).

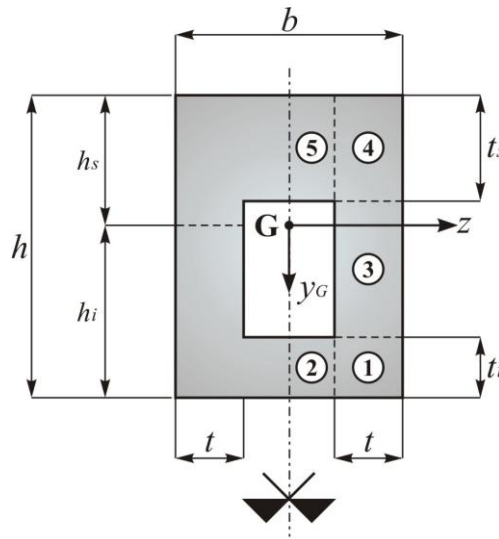


Figura Ej.3

La sección es homogénea y nos será útil para ejemplos posteriores, imponer que:

$$\begin{aligned} \varphi_j(y_G, z) &= k_j \quad (j=1, 2, 3) \\ k_j &\text{ constantes positivas} \end{aligned} \quad (\text{E3.1})$$

Se verifica entonces que:

$$\begin{aligned} E(y_G, z) &= k_1 \cdot E_0 & ; & & G(y_G, z) &= k_2 \cdot G_0 & ; & & \rho(y_G, z) &= k_3 \cdot \rho_0 \\ \Delta &= 0 & ; & & A^\infty &= \alpha_0^\infty = k_1 \cdot \Omega & ; & & J^\infty &= \alpha_2^\infty = k_1 \cdot J_G \\ \alpha_1^\infty &= \beta_1^\infty = 0 & ; & & \beta_0^\infty &= k_3 \cdot \Omega & ; & & \beta_2^\infty &= k_3 \cdot J_G \end{aligned} \quad (\text{E3.2})$$

Tenemos que



$$\begin{aligned}
\Omega &= b h - (b - 2t)(h - t_i - t_s) \\
2\Omega h_s &= 2t h^2 + (b - 2t)[t_s^2 + t_i(2h - t_i)] \\
h_i &= h - h_s \\
3J_G &= b(h_i^3 + h_s^3) - (b - 2t)[(h_i - t_i)^3 + (h_s - t_s)^3]
\end{aligned} \tag{E3.3}$$

Debido a la simetría de la sección, analizamos sólo los sectores 1, 2, 3, 4 y 5 indicados en la Figura Ej.3. Proponemos para cada sector los siguientes regímenes tensionales, de acuerdo a algunas soluciones homogéneas y particulares que describimos en la PARTE CUARTA para barras rectas gruesas:

$$\begin{aligned}
\tau_{nxy} &= g_n(y_G) - \frac{k_1 \cdot Q}{2J_G} \cdot y_G^2 \quad (n = 1, 2, 3, 4 \text{ y } 5) \\
\tau_{nxz} &= -z \cdot g'_n(y_G) - G_n(y_G)
\end{aligned} \tag{E3.4}$$

Este conjunto de soluciones para los cinco (5) sectores elegidos, que ya satisface el equilibrio, debe verificar las siguientes diez y seis (16) condiciones de reciprocidad en fronteras externas e internas, de continuidad en fronteras comunes y condiciones de simetría, a saber:

$$\begin{aligned}
\tau_{1xy}(h_i, z) &= 0 \quad ; \quad \tau_{2xy}(h_i, z) = 0 \\
\tau_{2xy}(h_i - t_i, z) &= 0 \quad ; \quad \tau_{4xy}(-h_s, z) = 0 \\
\tau_{5xy}(-h_s, z) &= 0 \quad ; \quad \tau_{5xy}(-h_s + t_s, z) = 0 \\
\tau_{1xz}\left(y_G, \frac{b}{2}\right) &= 0 \quad ; \quad \tau_{4xz}\left(y_G, \frac{b}{2}\right) = 0 \\
\tau_{2xz}(y_G, 0) &= 0 \quad ; \quad \tau_{5xz}(y_G, 0) = 0 \\
\tau_{3xz}\left(y_G, \frac{b}{2}\right) &= 0 \quad ; \quad \tau_{3xz}\left(y_G, \frac{b}{2} - t\right) = 0 \\
\tau_{1xy}(h_i - t_i, z) &= \tau_{3xy}(h_i - t_i, z) \\
\tau_{3xy}(-h_s + t_s, z) &= \tau_{4xy}(-h_s + t_s, z) \\
\tau_{1xz}\left(y_G, \frac{b}{2} - t\right) &= \tau_{2xz}\left(y_G, \frac{b}{2} - t\right) \\
\tau_{2xz}\left(y_G, \frac{b}{2}\right) &= \tau_{3xz}\left(y_G, \frac{b}{2}\right)
\end{aligned} \tag{E3.5}$$

Para completar el problema, nos bastará con elegir, para el sector 1, las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} g_n(y_G) &= g_{0n} + g_{1n} \cdot y_G \\ G_n(y_G) &= G_{0n} \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, 4 \text{ y } 5) \quad (\text{E3.6})$$

Simplificamos la nomenclatura definiendo

$$\begin{aligned} g_{0n} &= g_{0n}^* \cdot \frac{k_1 Q}{J_G} \quad ; \quad g_{1n} = g_{1n}^* \cdot \frac{k_1 Q}{J_G} \quad ; \quad G_{0n} = G_{0n}^* \cdot \frac{k_1 Q}{J_G} \\ (n &= 1, 2, 3, 4 \text{ y } 5) \end{aligned} \quad (\text{E3.7})$$

Resolviendo las (E3.5) encontramos que:

$$\begin{aligned} g_{01}^* &= \frac{h_i}{4t} [2h_i(b-t) + t_i(2t-b)] \quad ; \quad g_{04}^* = \frac{h_s}{4t} [2h_s(b-t) + t_s(2t-b)] \\ g_{02}^* &= \frac{h_i}{2} (t_i - h_i) \quad ; \quad g_{04}^* = \frac{h_s}{2} (t_s - h_s) \\ g_{03}^* &= \frac{1}{4t} [2th_i^2 + t_i(2t-b)(t_i - 2h_i)] \quad ; \\ g_{11}^* &= \frac{1}{4t} (b-2t)(t_i - 2h_i) \quad ; \quad g_{14}^* = -\frac{1}{4t} (b-2t)(t_s - 2h_s) \\ g_{12}^* &= h_i - \frac{t_i}{2} \quad ; \quad g_{15}^* = -h_s + \frac{t_s}{2} \\ g_{13}^* &= 0 \quad ; \\ G_{01}^* &= \frac{1}{8t} (b-2t)(2h_i - t_i) \quad ; \quad G_{04}^* = \frac{1}{8t} (b-2t)(2h_s - t_s) \\ G_{02}^* &= G_{05}^* = G_{03}^* = 0 \end{aligned} \quad (\text{E3.8})$$

Para fijar ideas y a modo de conclusión numérica de este ejemplo, sean tres casos de sección anular

- Si  $b = 0.05, h = 0.1, t = t_s = t_i = 0.002$  y  $k_1 = k_2$  entonces  $m = 1.616467141$
- Si  $b = 0.05, h = 0.1, t = t_i = 0.002, t_s = 0.004$  y  $k_1 = k_2$  entonces  $m = 1.862904287$
- Si  $b = 0.05, h = 0.1, t = 0.0245 \left( \approx \frac{b}{2} \right), t_s = t_i = 0.002$ , y  $k_1 = k_2$  entonces  $m = 1.200144183$ , que tiende al valor correspondiente de la sección rectangular maciza.

- **Ejemplo 4:** BARRA RECTA GRUESA DE SECCIÓN RECTANGULAR CON PARÁMETROS FUNCIONALMENTE GRADUADOS. (Ver Figura Ej.4).

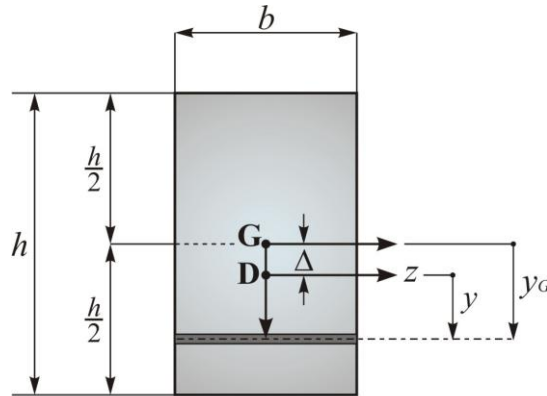


Figura Ej.4

$$\varphi_j(y_G, z) = \varphi_j(y_G) = k_j + \frac{(1 - k_j)}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{2y_G}{h}\right)^n \quad (\text{E4.1})$$

 $(j = 1, 2, 3) ; n \text{ constante real}$ 

Vemos que

$$b(y_G)=b \quad ; \quad h_i=h_s=\frac{h}{2} \quad ; \quad \Omega=bh \quad ; \quad J_G=\frac{bh^3}{12} \quad (\text{E4.2})$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} \lambda^\infty(y_G) &= b \cdot \varphi_1(y_G) & ; & \quad \mu^\infty(y_G) = b \cdot \varphi_3(y_G) \\ A^\infty &= \alpha_0^\infty = \Omega \cdot A^\infty = \Omega \cdot \frac{(1+n k_1)}{(1+n)} & ; & \quad \beta_0^\infty = \Omega \cdot \frac{(1+n k_3)}{(1+n)} \\ \Delta &= \frac{(k_1-1) \cdot n h}{2(n+2)(1+n k_1)} \quad (<0 \text{ ó } >0) & ; & \quad \beta_1^\infty = \frac{\Omega h}{2} \cdot \frac{n \cdot (k_3 - k_1)}{(n+2)(1+n k_1)} \end{aligned} \quad (\text{E4.3})$$

$$J^\infty = \alpha_2^\infty = J_G \cdot \frac{12 + nk_1(4 + nk_1)(n^2 + 4n + 7)}{(n + 3)(n + 2)^2(1 + nk_1)}$$

$$\beta_2^\infty = J_G \cdot \frac{p_0 + p_1n + p_2n^2 + p_3n^3 + p_4n^4 + p_5n^5}{(n + 3)(n + 2)^2(1 + nk_1)^2}$$

donde

$$\begin{aligned} p_0 &= 12 & ; & \quad p_1 = 8(3k_1 + 2k_3) \\ p_2 &= 21k_1^2 + 2k_3(8 + 7k_1) & ; & \quad p_3 = 12k_1^2 + k_3(4 + 8k_1 + 7k_1^2) \\ p_4 &= 3k_1^2 + 2k_1k_3(1 + 2k_1) & ; & \quad p_5 = k_3k_1^2 \end{aligned} \quad (\text{E4.4})$$

La distribución tensional homogénea que adoptamos, es una de las vistas en la PARTE CUARTA:

$$\tau_{xy}^H = g(y_G) \quad ; \quad \tau_{xz}^H = -z \cdot g'(y_G) \quad (\text{E4.5})$$

Intentamos con la siguiente solución particular de las tensiones tangenciales, considerando que la sección tiene módulo elástico funcionalmente graduado (ver E4.1):

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^P &= \frac{CQ}{J^\infty} \cdot \int \varphi_1(y_G)(y_G - \Delta) dy_G \\ \tau_{xz}^P &= -\frac{(1+C)Q}{J^\infty} \cdot \varphi_1(y_G) \cdot z \cdot (y_G - \Delta) \end{aligned} \quad (\text{E4.6})$$

C es, por ahora, una constante arbitraria y la integral propuesta en (E4.6) es indefinida.

De la condición de nulidad de  $\tau_{xz}$  en  $z = \pm \frac{b}{2}$  deberá cumplirse que:

$$g'(y_G) + \frac{(1+C)Q}{J^\infty} \cdot \varphi_1(y_G)(y_G - \Delta) = 0 \quad (\text{E4.7})$$

La posibilidad más sencilla de verificar (E4.7) sería:

$$C = -1 \quad \text{y} \quad g'(y_G) = 0 \quad (\text{E4.8})$$

Veamos a continuación si esta alternativa es viable.

Las (E4.8) conducen a que:

$$\tau_{xz} = 0 \quad (\text{E4.9})$$

y que:

$$g(y_G) = K = \text{constante} \quad (\text{E4.10})$$

De esta forma

$$\tau_{xy}(y_G, z) = \tau_{xy}(y_G) = \frac{Q}{J_G} \left[ \frac{J^\infty K}{Q} - \int \varphi_1(y_G)(y_G - \Delta) dy_G \right] = f(y_G)Q \quad (\text{E4.11})$$

Siendo entonces:

$$f(y_G) \equiv \frac{J^\infty K}{Q} + k_1 \left( \Delta y_G - \frac{y_G^2}{2} \right) + \frac{(1-k_1)(h-2y_G)^{n+1} [2n(y_G - \Delta) - 4\Delta + h + 2y_G]}{2^{n+2} h^n (n+1)(n+2)} \quad (\text{E4.12})$$

De la condición de reciprocidad para  $\tau_{xy}$ , o sea:

$$\tau_{xy} \left( -\frac{h}{2}, z \right) = \tau_{xy} \left( \frac{h}{2}, z \right) = 0 \quad (\text{E4.13})$$

se obtiene:

$$K = \frac{Q}{8J^\infty} \cdot k_1 h (h - 4\Delta) \quad (\text{E4.14})$$

También se verifica idénticamente que:

$$\iint_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega = Q \quad (\text{E4.15})$$

Por lo tanto las asunciones (E4.8) son válidas ya que el problema es lineal y la solución es única y no quedan constantes sin determinar.

El factor de corte en este caso vale:

$$m = A^\infty \iint_{\Omega} \frac{f^2(y_G)}{\varphi_2(y_G)} d\Omega = b A^\infty \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{f^2(y_G)}{\varphi_2(y_G)} dy_G \quad (\text{E4.16})$$

Damos a continuación algunos valores numéricos.

Por ejemplo para  $b = 25$ ,  $h = 50$  y  $k_1 = k_2 = 1$  (módulo de elasticidad y densidad homogéneos) obtenemos que  $\Delta = 0$  y que  $m = 1.2$  (el valor de  $n$  no interviene).

En las cuatro (4) Tablas siguientes para  $b = 25$ ,  $h = 50$ , para distintos valores de  $k_1, k_2$  y  $n$  se encuentran los correspondientes valores de corrimiento  $\Delta$  del eje neutro y los valores de factor de corte  $m$ .

$$k_1 = 0.3 ; k_2 = 1.3$$

$n$	0	1	3	10
$\Delta$	0	-4.48718	-5.52632	-3.64583
$m$	1.2	0.70541	0.46174	0.33014

$$k_1 = 0.3 ; k_2 = 0.4$$

$n$	0	1	3	10
$\Delta$	0	-4.48718	-5.52632	-3.64583
$m$	1.2	1.11445	1.09341	1.01468

(E4.17)

$$k_1 = 1.7 ; k_2 = 1.4$$

$n$	0	1	3	10
$\Delta$	0	2.16049	1.72131	0.81018
$m$	1.2	1.35002	1.39249	1.43267

$$k_1 = 1.7 ; k_2 = 0.6$$

$n$	0	1	3	10
$\Delta$	0	2.16049	1.72131	0.81018
$m$	1.2	2.07883	2.82227	3.29007

Más adelante, al calcular las frecuencias naturales para esta sección rectangular funcionalmente graduada, necesitaremos con  $b = 25$ ,  $h = 50$ ,  $n = 3$  y  $k_1 = 0.3$ ,  $k_2 = 1.3$ ,  $k_3 = 2$  ( $\Delta = -5.52632$  y  $m = 0.46174$ ), los valores siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha_0^\infty &= 593.75 & ; & \alpha_1^\infty = 0 & ; & \alpha_2^\infty = 123793.8597 \\ \beta_0^\infty &= 2187.75 & ; & \beta_1^\infty = 16776.3158 & ; & \beta_2^\infty = 548303.3241 \end{aligned} \quad (E4.18)$$

- **Ejemplo 5:** BARRA RECTA DE SECCIÓN RECTANGULAR NO HOMOGÉNEA CON TRES (3) SECTORES DE IGUAL ANCHO (Ver Figura 3).

La distribución tensional fue resuelta por medio del MÉTODO I DE SUPERPOSICIÓN en la sección 3.1 de la PARTE TERCERA –utilizando las expresiones (3.31), (3.32), (3.33) y (3.35)–, y que reproducimos a continuación:

$$\text{Sectores 1 } \left( y_G \in \left( -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + a \right) \right) \text{ y } 2 \left( y_G \in \left( \frac{h}{2} - a, \frac{h}{2} \right) \right)$$

$$\tau_{xy} = k_1 h^2 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2y_G}{h} \right)^2 \right] \frac{Q}{8J^\infty} \equiv f_1(y_G)Q \quad (E5.1)$$

$$\tau_{xz} = 0$$

$$\text{Sector 3 } \left( y_G \in \left( -\frac{h}{2} + a, \frac{h}{2} - a \right) \right)$$

$$\tau_{xy} = \left\{ k_1 h^2 \left[ 1 - \left( \frac{2y_G}{h} \right)^2 \right] + (k_2 - k_1)(h - 2a)^2 \left[ 1 - \left( \frac{2y_G}{h - 2a} \right)^2 \right] \right\} \frac{Q}{8J^\infty} \equiv f_2(y_G)Q \quad (E5.2)$$

$$\tau_{xz} = 0$$

Calcularemos a modo de aplicación numérica, algunos valores del factor de corte  $m$ .

Para fijar ideas, tomemos  $b = 20$ ,  $h = 60$ ,  $a = 15$ , por lo cual  $\Omega = 1200$ ;  $J_G = 360000$  y además:

$$\lambda^\infty(y_G) = \begin{cases} 20k_1 & y_G \in \left( -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + a \right) \\ 20k_2 & y_G \in \left( -\frac{h}{2} + a, \frac{h}{2} - a \right) \\ 20k_1 & y_G \in \left( \frac{h}{2} - a, \frac{h}{2} \right) \end{cases} \quad (E5.3)$$

De esta manera, o bien calculados por integración directa o indirectamente con la superposición, tenemos:

$$A^\infty = \alpha_0^\infty = 600k_1 + 600k_2$$

$$\Delta = 0 \quad (E5.4)$$

$$J^\infty = \alpha_2^\infty = 315000 k_1 + 45000 k_2$$

Si por otro lado adoptamos el módulo transversal de elasticidad que sigue:

$$G(y_G, z) = G(y_G) \begin{cases} n_1 G_0 & y_G \in \left( -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + a \right) \\ n_2 G_0 & y_G \in \left( -\frac{h}{2} + a, \frac{h}{2} - a \right) \\ n_1 G_0 & y_G \in \left( \frac{h}{2} - a, \frac{h}{2} \right) \end{cases} \quad (E5.5)$$

la expresión del factor de corte  $m$  será:

$$m = b A^\infty \left[ \frac{1}{n_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+a} f_1^2(y_G) d y_G + \frac{1}{n_2} \int_{-\frac{h}{2}+a}^{\frac{h}{2}-a} f_2^2(y_G) d y_G + \frac{1}{n_1} \int_{\frac{h}{2}-a}^{\frac{h}{2}} f_1^2(y_G) d y_G \right] \quad (E5.6)$$

Imponiendo  $n_1 = n_2 = 1$ , calculamos a modo de ilustración, los siguientes tres (3) factores de corte:

- $k_1 = k_2 = 1$  (sección rectangular homogénea)  $\Rightarrow m = 1.2$
- $k_1 = 1, k_2 = 2 \Rightarrow m = 1.8$
- $k_1 = 2, k_2 = 1 \Rightarrow m = 1.76$
- **Ejemplo 6:** BARRA RECTA DE SECCIÓN RECTANGULAR NO HOMOGÉNEA CON DOS (2) SECTORES DE IGUAL ANCHO. (Ver Figura 8).

La distribución de las tensiones tangenciales para este caso, la hemos encontrado en la sección 3.2 de la PARTE TERCERA por medio del MÉTODO II DE SUPERPOSICIÓN. Con las expresiones (3.60) y (3.61) en base a las tensiones dadas por las ecuaciones (3.63) obtenemos que:

Sector 1  $\left( y_G \in \left( -\frac{h}{2} + a, \frac{h}{2} \right) \right)$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \left[ 1 - \left( \frac{2y_{GI}}{h_I} \right)^2 \right] \frac{Q_I h_I^2}{8J_{GI}} + \left[ 1 - \left( \frac{2y_{GIII}}{h_{III}} \right)^2 \right] \frac{Q_{III} h_{III}^2}{8J_{GIII}} \\ \tau_{xz} &= 0 \end{aligned} \quad (E6.1)$$

Sector 2  $\left( y_G \in \left( -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + a \right) \right)$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \left[ 1 - \left( \frac{2y_{GII}}{h_{II}} \right)^2 \right] \frac{Q_{II} h_{II}^2}{8J_{GII}} + \left[ 1 - \left( \frac{2y_{GIII}}{h_{III}} \right)^2 \right] \frac{Q_{III} h_{III}^2}{8J_{GIII}} \\ \tau_{xz} &= 0 \end{aligned} \quad (E6.2)$$



Con las expresiones (3.56), (3.57), (3.59) y (3.64) tenemos  $y_{Gj}$ ,  $J_{Gj}$  y  $h_j$  para los subdominios  $j = I, II, III$ . A la vez para hallar las fracciones del esfuerzo de corte  $-Q_I, Q_{II}, Q_{III}$  -de cada subdominio, resolvemos el sistema de cinco (5) ecuaciones formado por (3.53) y las (3.62). Hallamos adicional e indirectamente  $J^\infty$  y  $\Delta$ .

Calculamos a continuación algunos valores numéricos del factor de corte  $m$ .

Elegimos para todos los casos  $b = 20$ ,  $h = 60$ ,  $a = 15$ , por lo cual  $\Omega = 1200$ ;  $J_G = 360000$  pero se irán modificando los valores de  $k_1$  y  $k_2$ . Además adoptamos  $\varphi_2(y_G, z) = 1$  o sea  $G(y_G, z) = G_0$ . Se observa que:

$$\lambda^\infty(y_G) = \begin{cases} 20k_1 & y_G \in \left(-\frac{h}{2} + a, \frac{h}{2}\right) \\ 20k_2 & y_G \in \left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + a\right) \end{cases} \quad (E6.3)$$

Calculado, como dijimos indirectamente por medio de la superposición, se cumple que:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{22.5(k_1 - k_2)}{3k_1 + k_2} \\ J^\infty &= \frac{5625(81k_1^2 + 174k_1k_2 + k_2^2)}{3k_1 + k_2} \quad (= \alpha_2^\infty) \end{aligned} \quad (E6.4)$$

Todavía es sencillo hallar que:

$$A^\infty = 300(3k_1 + k_2) \quad (= \alpha_0^\infty) \quad (E6.5)$$

Por ejemplo entonces:

- $k_1 = k_2 = 1$  (sección rectangular homogénea)  $\Rightarrow m = 1.2$   
siendo  $\Delta = 0$ ,  $A^\infty = \Omega = 1200$ ,  $J^\infty = J_G = 360000$  y además  $Q_I = Q_{II} = 0$ ,  $Q_{III} = Q$ .
- $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2 \Rightarrow m = 1.4918$   
siendo  $\Delta = -4.5$ ,  $A^\infty = 1500$ ,  $J^\infty = 487125$  y además  $Q_I = -0.1871Q$ ,  $Q_{II} = 0.0046Q$ ,  $Q_{III} = 1.1824Q$ .
- $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1 \Rightarrow m = 2.1683$

Siendo  $\Delta = 3.2143$ ,  $A^\infty = 2100$ ,  $J^\infty = 540803.57$  y además  $Q_I = 0.2407Q$ ,  
 $Q_{II} = -0.0015Q$ ,  $Q_{III} = 0.7608Q$ .

#### APLICACIÓN 1.2. TENSIONES TANGENCIALES Y FACTOR DE CORTE EN BARRAS CURVAS GRUESAS

- Ejemplo 7: BARRA CURVA DE SECCIÓN TRAPEZOIDAL HOMOGÉNEA. (Ver Figura Ej.7)

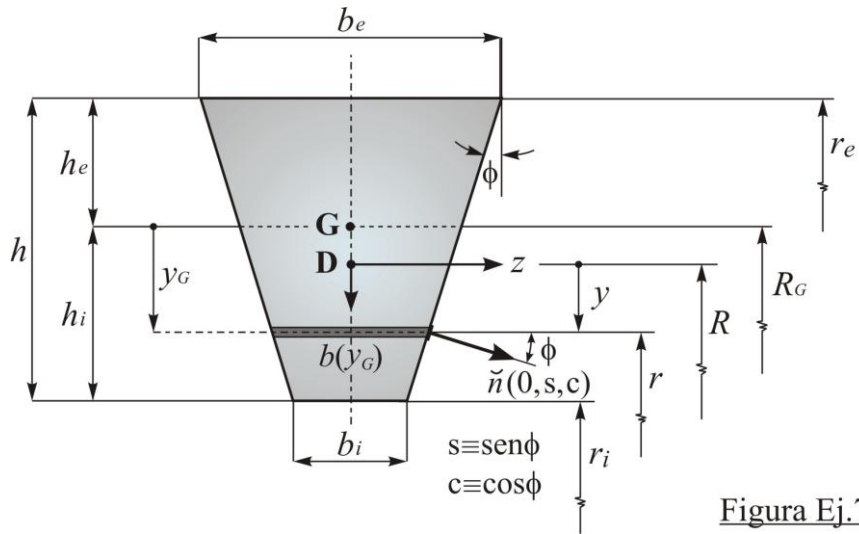


Figura Ej.7

Por tratarse de una sección homogénea se verifica que:

$$\varphi_j(y_G, z) = 1 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (E7.1)$$

es decir:

$$E(y_G, z) = E_0 ; G(y_G, z) = G_0 ; \rho(y_G, z) = \rho_0 \quad (E7.2)$$

Son conocidos

$$\Omega = (b_i + b_e) \cdot \frac{h}{2} ; \quad \lambda^R(y_G) = b(y_G) = 2T(r - r_i) + b_i \quad (E7.3)$$

siendo

$$T = \operatorname{tg} \phi = \frac{b_e - b_i}{2h} ; \quad r = R_G - y_G = R - y \quad (E7.4)$$

$$r_i = R_G - h_i ; \quad r_e = R_G + h_e$$

donde

$$h_e = \frac{h}{3} \cdot \frac{(2b_i + b_e)}{b_i + b_e} \quad ; \quad h_i = \frac{h}{3} \cdot \frac{(2b_e + b_i)}{b_i + b_e} \quad (\text{E7.5})$$

Proponemos para las tensiones tangenciales la siguiente suma de una solución homogénea más una particular tomadas de algunas de las propuestas descritas en la PARTE CUARTA y que como sabemos satisfacen el equilibrio:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha r} &= g(y_G) \equiv f_1(y_G)Q \\ \tau_{\alpha z} &= -\frac{z}{r} \left[ r g'(y_G) - g(y_G) + \left(1 - \frac{R_G}{r}\right) V Q \right] \equiv f_2(y_G)Q \end{aligned} \quad (\text{E7.6})$$

Recordemos que  $V = -\frac{R^2}{J^R}$  (expresión (2.25)).

Por supuesto se verifica que:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha r}(y_G, z) &= \tau_{\alpha r}(y_G, -z) \\ \tau_{\alpha z}(y_G, z) &= -\tau_{\alpha z}(y_G, -z) \end{aligned} \quad (\text{E7.7})$$

Deben satisfacerse las condiciones de reciprocidad que valen:

$$\tau_{\alpha r}(-h_e, z) = \tau_{\alpha r}(h_i, z) = \tau_{\alpha n}\left(y_G, \frac{1}{2}b(y_G)\right) = 0 \quad (\text{E7.8})$$

Indicamos como  $\tau_{\alpha n}(y_G, z)$  a la componente tangencial en cualquier punto de la sección en la dirección de la normal  $\tilde{n}$  al lado inclinado (ver Figura Ej.7). O sea en general si

$$\begin{aligned} s &\equiv \sin \phi = \frac{T}{\sqrt{1+T^2}} \\ c &\equiv \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1+T^2}} \end{aligned} \quad (\text{E7.9})$$

será:

$$\tau_{\alpha n}(y_G, z) = \tau_{\alpha r}(y_G, z)s + \tau_{\alpha z}(y_G, z)c \quad (\text{E7.10})$$

Por lo tanto las CB (E7.8) conducen a las siguientes conclusiones:

$$\begin{aligned} g(-h_e) &= g(h_i) = 0 \\ T \tau_{\alpha r}\left(y_G, \frac{1}{2}b(y_G)\right) + \tau_{\alpha z}\left(y_G, \frac{1}{2}b(y_G)\right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E7.11})$$

Todavía la tercera de las (E7.11) da lugar a la ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden a coeficientes variables:

$$g'(y_G) - 2 \left[ \frac{b(y_G) + Tr}{rb(y_G)} \right] g(y_G) = \frac{V y_G}{r^2} \cdot Q \quad (E7.12)$$

La solución vale:

$$6hr^2b(y_G)g(y_G) = V(C + C_2 y_G^2 + C_3 y_G^3)Q \quad (E7.13)$$

siendo C una constante a determinar y por otro lado hemos denominado como:

$$C_2 \equiv 2h \cdot \frac{(b_i^2 + b_e^2 + b_i b_e)}{b_i + b_e} \quad (E7.14)$$

$$C_3 \equiv -4Th$$

La constante C surge indistintamente de cualquiera de las dos primeras condiciones (E7.11) y vale entonces

$$C = -\frac{2h^3}{27} \cdot \frac{(2b_e + b_i)^2 \cdot (2b_i + b_e)^2}{(b_i + b_e)^3} \quad (E7.15)$$

Cabe consignar también, que con el valor hallado de la tensión tangencial  $\tau_{\alpha r}$  se verifica idénticamente que:

$$\iint_{\Omega} \tau_{\alpha r} d\Omega = Q \quad (E7.16)$$

que no es más que una ratificación del cumplimiento simultáneo del equilibrio y de las CB.

De esta manera concluimos el problema de la distribución de las tensiones tangenciales en una sección trapezoidal homogénea de una barra curva gruesa.

Calcularemos a continuación y a modo de aplicación numérica el factor de corte de diversos casos que vale (recordar la expresión (2.35)):

$$m \equiv \frac{A^R}{R} \iint_{\Omega} [f_1^2(y_G) + f_2^2(y_G, z)] r d\Omega \quad (E7.17)$$

donde con los valores (E7.6) (E7.13) tenemos que:

$$f_1(y_G) = g(y_G) = \frac{(C + C_2 y_G^2 + C_3 y_G^3)}{6hr^2b(y_G)} \cdot VQ \quad (E7.18)$$

$$f_2(y_G) = -z \left[ g'(y_G) - \frac{2g(y_G)}{r} - \frac{VQ}{r^2} \cdot y_G \right]$$

Entonces

- $b_i = 10, b_e = 30, h = 40, R_G = 400, R = 399.6913$

$$A^R = \Omega = 800, J^R = 98696.6623$$

$$\Rightarrow m = 1.2303$$

- $b_i = 30, b_e = 10, h = 40, R_G = 400, R = 399.6971$

$$A^R = \Omega = 800, J^R = 98696.6472$$

$$\Rightarrow m = 1.2268$$

- $b_i = 10, b_e = 30, h = 40, R_G = 80, R = 78.3662$

$$A^R = \Omega = 800, J^R = 102430.1233$$

$$\Rightarrow m = 1.2376$$

- $b_i = 30, b_e = 10, h = 40, R_G = 80, R = 78.5175$

$$A^R = \Omega = 800, J^R = 93119.7682$$

$$\Rightarrow m = 1.2198$$

- **Ejemplo 8:** BARRA CURVA DE SECCIÓN RECTANGULAR HOMOGÉNEA.

Se trata de una caso particular del caso considerado en el Ejemplo 7, cuando  $b_i = b_e = b$ . Entonces observando (E7.3), (E7.4) y (E7.5) será:

$$\begin{aligned} \Omega &= b h & ; & \quad \lambda^R(y_G) = b & ; & \quad T = 0 \\ r &= R_G - y_G = R - y & ; & \\ h_i &= h_e = \frac{h}{2} & ; & \quad r_i = R_G - \frac{h}{2} & ; & \quad r_e = R_G + \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (E8.1)$$

En este caso las tensiones tangenciales considerando las expresiones (E7.6), (E7.13) y (E7.18):

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha r} &= -\frac{V h^2}{8 r^2} \left[ 1 - \left( \frac{2 y_G}{h} \right)^2 \right] Q \\ \tau_{\alpha z} &= 0 \end{aligned} \quad (E8.2)$$

A continuación tabulamos el factor de corte (expresión (2.35)) para una sección rectangular homogénea de una barra curva gruesa para tres (3) valores de  $\frac{h}{R_G}$ . Adoptamos  $h = 40$  y el valor de  $b$  es arbitrario.

$\frac{h}{R_G}$	0.1	0.5	1
$m$	1.19997	1.199258	1.19662

(E8.3)

- **Ejemplo 9:** BARRA CURVA DE SECCIÓN HOMOGÉNEA DOBLE “T”. (Ver Figura Ej.9)

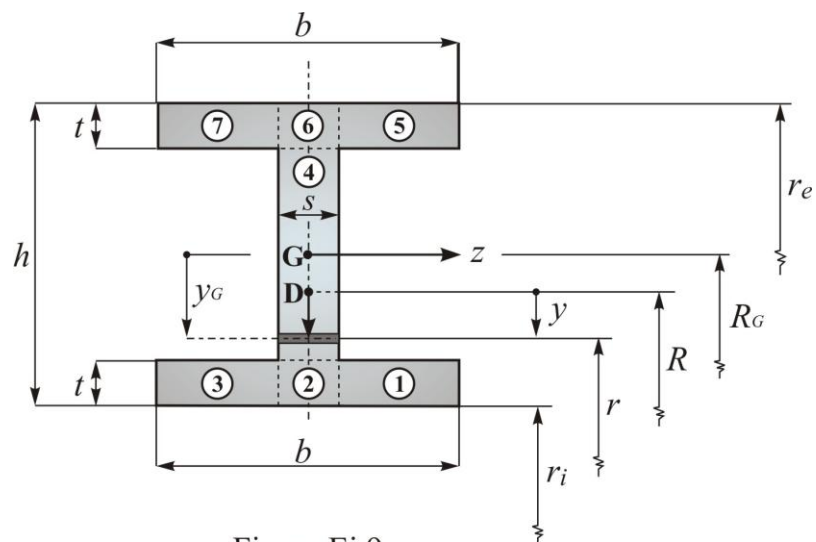


Figura Ej.9

Observamos que para secciones con  $\varphi_j(y_G, z) = 1$  ( $j = 1, 2, 3$ ) se cumple

$$\begin{aligned}
\Omega &= 2bt + (h - 2t)s & ; & & r &= R_G - y_G = R - y \\
r_i &= R_G - \frac{h}{2} & ; & & r_e &= R_G + \frac{h}{2} \\
q_1 &= \frac{h}{2} - t & ; & & q_5 &= -\left(\frac{h}{2} - t\right) = -q_1
\end{aligned}$$

$$\lambda^R(y_G) = \begin{cases} b & y_G \in \left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + t\right) \\ s & y_G \in \left(-\frac{h}{2} + t, \frac{h}{2} - t\right) \\ b & y_G \in \left(\frac{h}{2} - t, \frac{h}{2}\right) \end{cases} ; \quad \alpha_0^R = b \left( \ln \frac{r_i + t}{r_i} + \ln \frac{r_e}{r_e - t} \right) + s \ln \frac{r_e - t}{r_i + t} \quad (\text{E9.1})$$

$$\begin{aligned}
R &= \frac{\Omega}{\alpha_0^R} & ; & & \alpha_2^R &= \Omega (R_G - R) \\
A^R &= R \alpha_0^R & ; & & J^R &= R \alpha_2^R
\end{aligned}$$

Los valores de los espesores  $s$  y  $t$  son arbitrarios. Es decir este planteo general incluye el caso de secciones doble "T" de pared delgada.

El régimen tensional que adoptamos es la unión de unas soluciones homogéneas más alguna particular de acuerdo a la PARTE CUARTA (salvo obviamente la nomenclatura y factores constantes) para cada uno de los siete (7) sectores en que dividimos la sección doble "T" bajo estudio. Podríamos haber recurrido a la simetría de la misma, y trabajar con solamente cinco (5) sectores. O sea imponemos tentativamente que

$$\begin{aligned}
\tau_{j\alpha r}(y_G, z) &= V \left[ \frac{F_j(z)}{r^2} + g_j(y_G) + \frac{1}{2} - \frac{R_G}{r} \right] Q \\
\tau_{j\alpha z}(y_G, z) &= V \left\{ G_j(y_G) - z \left[ g'_j(y_G) - \frac{2g_j(y_G)}{r} \right] \right\} Q \\
&(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
\end{aligned} \quad (\text{E9.2})$$

Es importante recordar que la distribución (E9.2) satisface el equilibrio en cada uno de los sectores.

Entonces restan verificar las CB: reciprocidad en las fronteras externas, condiciones de continuidad en las fronteras comunes y condiciones de simetría. Deben cumplirse, entonces, las treinta y dos (32) restricciones siguientes:

- Nulidad de las  $\tau_{\alpha r}(y_G, z)$  en las fronteras externas.

$$\begin{aligned}\tau_{1\alpha r}\left(\frac{h}{2}, z\right) &= \tau_{2\alpha r}\left(\frac{h}{2}, z\right) = \tau_{3\alpha r}\left(\frac{h}{2}, z\right) = 0 \\ \tau_{1\alpha r}(q_1, z) &= \tau_{3\alpha r}(q_1, z) = 0 \\ \tau_{5\alpha r}\left(-\frac{h}{2}, z\right) &= \tau_{6\alpha r}\left(-\frac{h}{2}, z\right) = \tau_{7\alpha r}\left(-\frac{h}{2}, z\right) = 0 \\ \tau_{5\alpha r}(q_5, z) &= \tau_{7\alpha r}(q_5, z) = 0\end{aligned}\tag{E9.3}$$

- Nulidad de las  $\tau_{\alpha z}(y_G, z)$  en las fronteras externas.

$$\begin{aligned}\tau_{1\alpha z}\left(y_G, \frac{b}{2}\right) &= \tau_{3\alpha z}\left(y_G, -\frac{b}{2}\right) = 0 \\ \tau_{4\alpha z}\left(y_G, \frac{s}{2}\right) &= \tau_{4\alpha z}\left(y_G, -\frac{s}{2}\right) = 0 \\ \tau_{5\alpha z}\left(y_G, \frac{b}{2}\right) &= \tau_{7\alpha z}\left(y_G, -\frac{b}{2}\right) = 0\end{aligned}\tag{E9.4}$$

- Continuidad de las  $\tau_{\alpha r}(y_G, z)$  en las fronteras comunes.

$$\begin{aligned}\tau_{2\alpha r}(q_1, z) &= \tau_{4\alpha r}(q_1, z) \\ \tau_{4\alpha r}(q_5, z) &= \tau_{6\alpha r}(q_5, z)\end{aligned}\tag{E9.5}$$

- Continuidad de las  $\tau_{\alpha z}(y_G, z)$  en las fronteras comunes.

$$\begin{aligned}\tau_{1\alpha z}\left(y_G, \frac{s}{2}\right) &= \tau_{2\alpha z}\left(y_G, \frac{s}{2}\right) \\ \tau_{2\alpha z}\left(y_G, -\frac{s}{2}\right) &= \tau_{3\alpha z}\left(y_G, -\frac{s}{2}\right) \\ \tau_{5\alpha z}\left(y_G, \frac{s}{2}\right) &= \tau_{6\alpha z}\left(y_G, \frac{s}{2}\right) \\ \tau_{6\alpha z}\left(y_G, -\frac{s}{2}\right) &= \tau_{7\alpha z}\left(y_G, -\frac{s}{2}\right)\end{aligned}\tag{E9.6}$$

- Simetría de las  $\tau_{\alpha r}(y_G, z)$  en  $\pm z$

$$\begin{aligned}\tau_{1\alpha r}(y_G, z) &= \tau_{3\alpha r}(y_G, -z) \\ \tau_{5\alpha r}(y_G, z) &= \tau_{7\alpha r}(y_G, -z) \\ \tau_{k\alpha r}(y_G, z) &= \tau_{k\alpha r}(y_G, -z) \quad (k = 2, 4, 6)\end{aligned}\tag{E9.7}$$



- Antisimetría de las  $\tau_{\alpha z}(y_G, z)$  en  $\pm z$

$$\begin{aligned}\tau_{1\alpha z}(y_G, z) &= -\tau_{3\alpha z}(y_G, -z) \\ \tau_{5\alpha z}(y_G, z) &= -\tau_{7\alpha z}(y_G, -z) \\ \tau_{k\alpha z}(y_G, z) &= -\tau_{k\alpha z}(y_G, -z) \quad (k = 2, 4, 6)\end{aligned}\tag{E9.8}$$

Para resolver el problema de las CB basta imponer que

$$\begin{aligned}g_j(y_G) &= g_{j0} \quad (\Rightarrow g'_j(y_G) = -g_{j0}) \\ F_j(z) &= F_{j0} \quad ; \quad G_j(y_G) = G_{j0} \\ (j &= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)\end{aligned}\tag{E9.9}$$

siendo  $g_{j0}, F_j(z) = F_{j0}$  y  $G_j(y_G) = G_{j0}$  ( $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ) constantes que indicaremos a continuación.

No es difícil deducir (el autor trabajó interactuando con un programa MAPLE) los valores de todas ellas. O sea:

$$\begin{aligned}G_{k0} &= 0 \quad (k = 2, 4, 6) \quad ; \quad G_{10} = -G_{30} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{b(h-t)}{3r_i(r_i+t)+t^2} \\ G_{50} &= -G_{70} = \frac{3}{4} \cdot \frac{b(h-t)}{3r_e(r_e-t)+t^2} \\ F_{10} &= F_{30} = \frac{r_i}{2} \left[ r_e - \frac{(h-t)r_i^2}{3r_i(r_i+t)+t^2} \right] \\ F_{50} &= F_{70} = \frac{r_e}{2} \left[ r_i + \frac{(h-t)r_e^2}{3r_e(r_e-t)+t^2} \right] \\ F_{20} &= \frac{r_i}{2s} \cdot \frac{r_e st(3r_i+t) - r_i^3(b-s) + r_i^2[(r_e-t)(b+2s)+3st]}{3r_i(r_i+t)+t^2} \\ F_{60} &= -\frac{r_e}{2s} \cdot \frac{r_i st(3r_e-t) + r_e^3(b-s) - r_e^2[(r_i+t)(b+2s)-3st]}{3r_e(r_e-t)+t^2}\end{aligned}\tag{E9.10}$$

$$F_{40} = \frac{1}{2} \cdot \left[ r_i r_e - \frac{t}{s} (h-t)(b-s) \right]$$

$$g_{10} = g_{30} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(h-t)}{3r_i(r_i+t)+t^2} \quad ; \quad g_{50} = g_{70} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(h-t)}{3r_e(r_e-t)+t^2} \quad (E9.10)$$

$$g_{10} = -\frac{g_{10}}{s}(b-s) \quad ; \quad g_{60} = -\frac{g_{50}}{s}(b-s) \quad ; \quad g_{40} = 0$$

A modo de aplicación numérica y para fijar ideas calcularemos algunos valores del factor de corte " $m$ " por medio de la expresión (2.35) con  $b = 25$ ,  $h = 50$ ,  $s = 3$ ,  $t = 2$  para algunos casos particulares  $\frac{h}{R_G}$ .

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	500	499.3108	1.7614
0.5	100	96.5007	1.8185
1	50	42.6247	2.0664

(E9.11)

Sobre el eje de simetría de la sección doble "T" se presenta el diagrama de tensiones  $\tau_{\alpha r}(y_G, z)/Q$  para  $\frac{h}{R_G} = 0.5$ , que incluye la distribución en los sectores 2, 4 y 6.

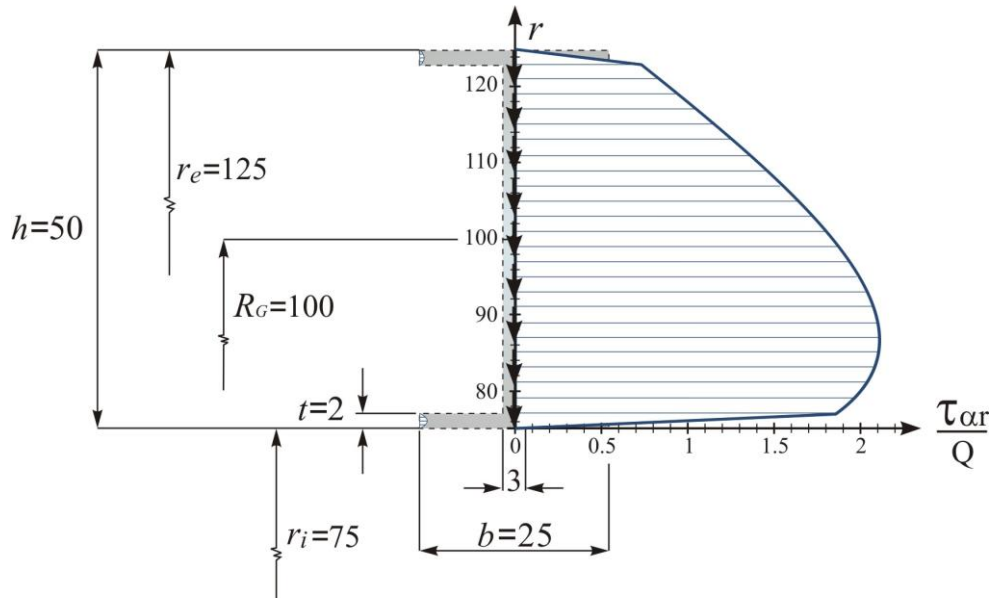


Figura Ej.9(a)

Se debe prestar atención, como se observa en los diagramas de tensiones  $\tau_{\alpha r}$  presentados, que los mismos varían continuamente y sin saltos. Erróneamente una divulgada bibliografía sobre el tema, cuando de barras rectas y fórmula de Collignon se trata, indican en cambio, unos saltos en los valores de las tensiones análogas a las mostradas en la Figura Ej.9(a). Son debidos al cambio brusco del momento estático en la expresión de Collignon. La distribución real es la que se indica en el presente trabajo, manteniéndose la continuidad del régimen tensional.

Sobre las alas, en los sectores 1 y 5 se muestra  $\tau_{\alpha r}(y_G, z)/Q$  y para todo  $z$ . Se adopta de nuevo  $\frac{h}{R_G} = 0.5$ .

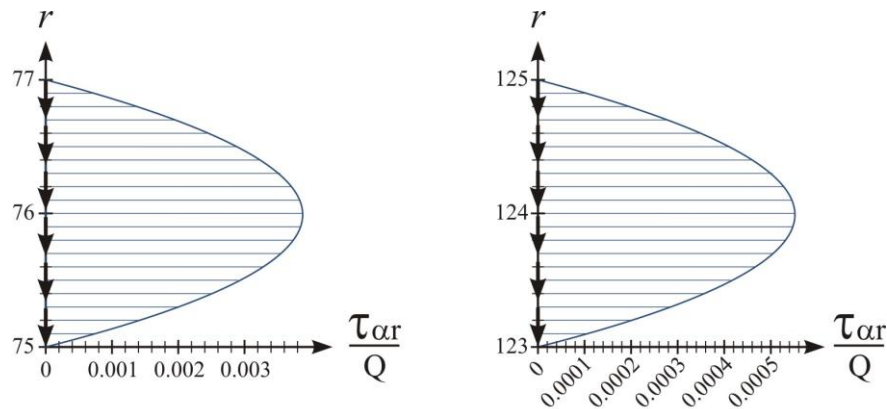


Figura Ej.9(b)

En la figura siguiente se presenta la distribución de los  $\tau_{\alpha z}(y_G, z)/Q$  en los sectores 1, 2, 3 y 5, 6, 7, siempre para  $\frac{h}{R_G} = 0.5$

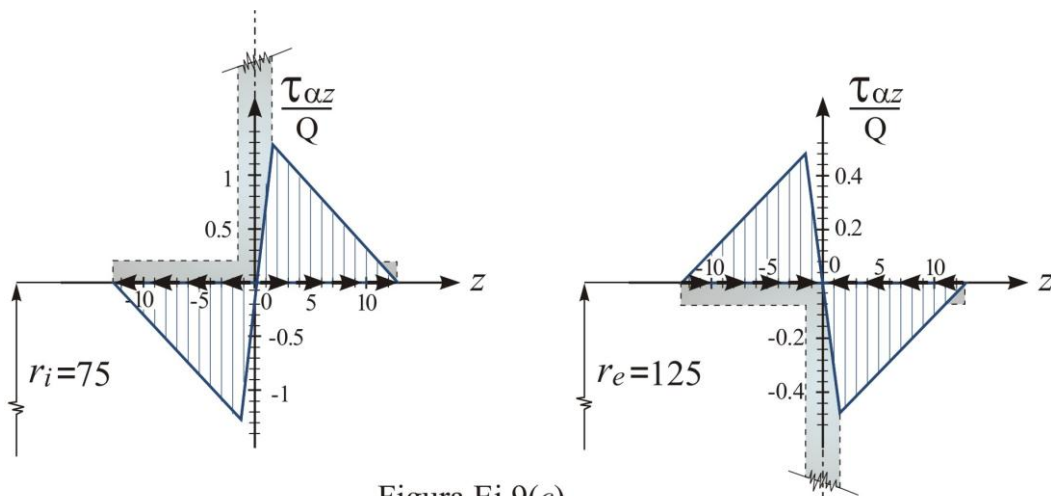
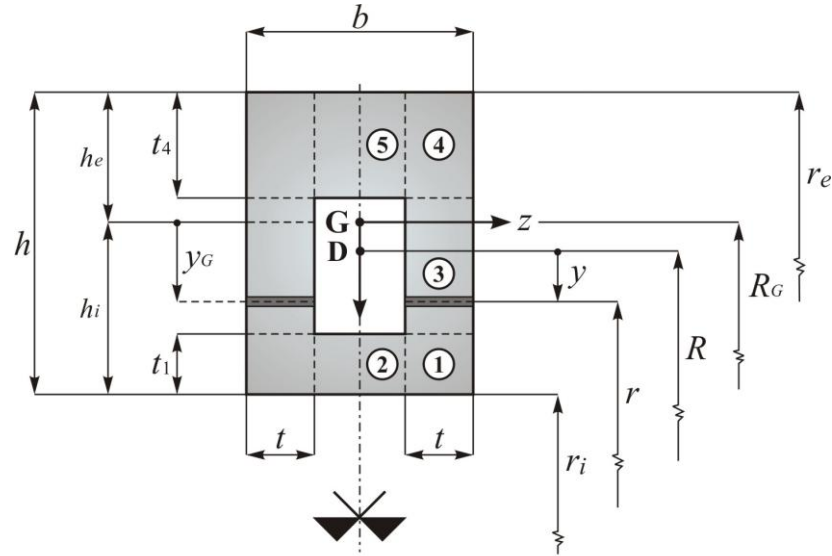


Figura Ej.9(c)

- **Ejemplo 10:** BARRA CURVA DE SECCIÓN RECTANGULAR HUECA HOMOGÉNEA DE ESPESOR VARIABLE. (Ver Figura Ej.10)



Tenemos

Figura Ej.10

$\varphi_j(y_G, z) = 1$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Para este tipo de secciones homogéneas se cumple:

$$\Omega = bh - (b - 2t)(h - t_1 - t_4) \quad ; \quad r = R_G - y_G = R - y$$

$$\lambda^R(y_G) = \begin{cases} b & y_G \in (-h_e, -h_e + t_4) \\ 2t & y_G \in (-h_e + t_4, h_i - t_1) \\ b & y_G \in (h_i - t_1, h_i) \end{cases} \quad ;$$

(E10.1)

$$\alpha_0^R = b \left[ \ln \left( \frac{r_e}{r_e - t_4} \right) + \ln \left( \frac{r_i + t_1}{r_i} \right) \right] + 2t \ln \left( \frac{r_e - t_4}{r_i + t_1} \right) \quad ; \quad R = \frac{\Omega}{\alpha_0^R}$$

$$\alpha_2^R = \Omega (R_G - R) \quad ; \quad A^R = R \alpha_0^R$$

$$J^R = R \alpha_2^R \quad ; \quad V = -\frac{R^2}{J^R}$$

Tomamos, de acuerdo a lo visto en la PARTE CUARTA, la siguiente distribución de tensiones tangenciales en cada uno de los cinco (5) subdominios que hemos considerado al tener en cuenta la simetría de la sección.

$$\begin{aligned}\tau_{j\alpha r}(y_G, z) &= VQ \left[ \frac{F_j(z)}{r^2} + g_j(y_G) + \frac{1}{2} - \frac{R_G}{r} \right] \\ \tau_{j\alpha z}(y_G, z) &= VQ \left\{ G_j(y_G) - z \left[ g'_j(y_G) - \frac{2g_j(y_G)}{r} \right] \right\} \\ (j &= 1, 2, 3, 4, 5)\end{aligned}\quad (E10.2)$$

Observemos que coincide con el régimen adoptado en el Ejemplo 9.

Como sabemos el equilibrio está idénticamente satisfecho y la distribución debe verificar las CB (reciprocidad en las fronteras externas e internas), las condiciones de continuidad en las fronteras comunes y las condiciones de simetría. O sea:

$$\begin{aligned}\tau_{1\alpha r}(h_i, z) &= \tau_{2\alpha r}(h_i, z) = \tau_{4\alpha r}(-h_e, z) = \tau_{5\alpha r}(-h_e, z) = 0 \\ \tau_{2\alpha r}(h_i - t_1, z) &= \tau_{5\alpha r}(-h_e + t_4, z) = 0 \\ \tau_{1\alpha z}(y_G, \frac{b}{2}) &= \tau_{4\alpha z}(y_G, \frac{b}{2}) = \tau_{3\alpha z}(y_G, \frac{b}{2}) = \tau_{3\alpha z}(y_G, \frac{b}{2} - t) = 0 \\ \tau_{2\alpha z}(y_G, 0) &= \tau_{5\alpha z}(y_G, 0) = 0 \\ \tau_{1\alpha r}(h_i - t_1, z) &= \tau_{3\alpha r}(h_i - t_1, z) \\ \tau_{3\alpha r}(-h_e + t_4, z) &= \tau_{4\alpha r}(-h_e + t_4, z) \\ \tau_{1\alpha z}(y_G, \frac{b}{2} - t) &= \tau_{2\alpha z}(y_G, \frac{b}{2} - t) \\ \tau_{4\alpha z}(y_G, \frac{b}{2} - t) &= \tau_{5\alpha z}(y_G, \frac{b}{2} - t)\end{aligned}\quad (E10.3)$$

Estas restricciones se satisfacen si

$$\begin{aligned}F_j(z) &= F_{0j} \text{ (ctes.)} \quad ; \quad G_j(y_G) = G_{0j} \text{ (ctes.)} \\ g_j(y_G) &= g_{0j} (R_G - y_G) \quad (g_{0j} \text{ constantes}) \\ (j &= 1, 2, 3, 4, 5)\end{aligned}\quad (E10.4)$$

que a su vez valen:

$$\begin{aligned}
 G_{01} &= \frac{3b}{8t} \cdot \frac{(b-2t)(2h_i-t_1)}{3r_i^2+3r_it_1+t_1^2} \\
 G_{02} &= G_{03} = G_{05} = 0 \\
 G_{04} &= \frac{3b}{8t} \cdot \frac{(b-2t)(-2h_e+t_4)}{3r_e^2-3r_et_4+t_4^2} \\
 g_{01} &= -\frac{(b-2t)}{4t} \cdot \frac{2h_i-t_1}{3r_i^2+3r_it_1+t_1^2} \\
 g_{02} &= \frac{2h_i-t_1}{2(3r_i^2+3r_it_1+t_1^2)} \\
 g_{03} &= 0 \\
 g_{04} &= \frac{(b-2t)}{4t} \cdot \frac{2h_e-t_4}{3r_e^2-3r_et_4+t_4^2} \\
 g_{05} &= -\frac{2h_e-t_4}{2(3r_e^2-3r_et_4+t_4^2)} \tag{E10.5} \\
 F_{01} &= \frac{r_i}{2} \left[ 2(R_G - g_{01}r_i^2) - r_i \right] \\
 F_{02} &= \frac{r_i}{2} \cdot \frac{\left[ 2(bR_G - 2tR_G + 2g_{01}tr_i^2) - r_i(b-2t) \right]}{(b-2t)} \\
 F_{03} &= -\frac{2R_G(bt_1 - 2t_1t - 2r_it) + 2r_i(tr_i + 2tt_1 - bt_1)}{4t} \\
 F_{04} &= \frac{r_e}{2} \left[ 2(R_G - g_{04}r_e^2) - r_e \right] \\
 F_{05} &= \frac{r_e}{2} \cdot \frac{\left[ 2(bR_G - 2tR_G + 2g_{04}tr_e^2) - r_e(b-2t) \right]}{(b-2t)}
 \end{aligned}$$

Calculamos a continuación los factores de corte para tres (3) casos particulares de  $\frac{h}{R_G}$ , siendo en todos los casos  $b = 0.05$ ,  $h = 0.1$ ,  $t_1 = 0.002$ ,  $t_4 = 0.003$ ,  $t = 0.004$

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	1	0.9988	1.4277
0.5	0.2	0.1941	1.4422
1	0.1	0.0872	1.5711

(E10.6)

- **Ejemplo 11:** BARRA CURVA DE SECCIÓN RECTANGULAR HUECA HOMOGÉNEA DE ESPESOR CONSTANTE. (Ver Figura Ej.11)

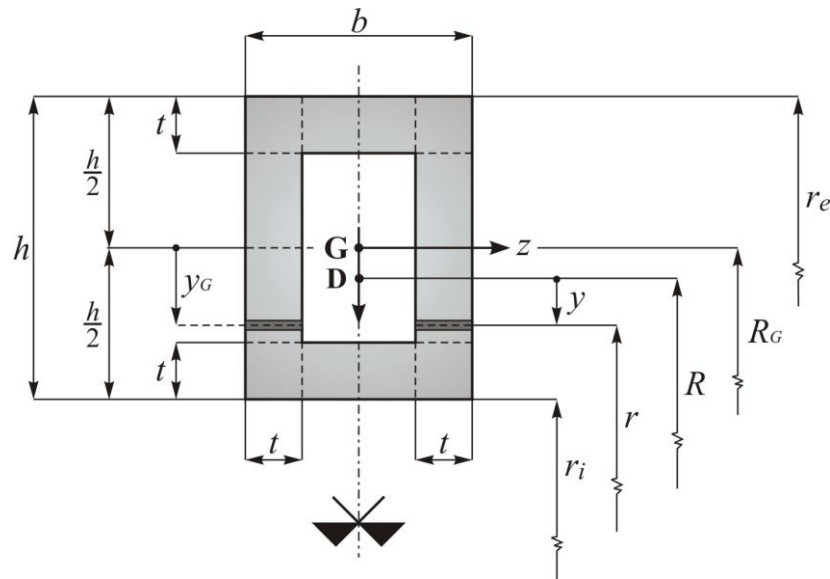


Figura Ej.11

Cuando en el Ejemplo 10 tomamos  $t_1 = t_4 = t$ , y entonces  $h_e = h_i = \frac{h}{2}$ , tenemos el caso de una sección rectangular hueca de espesor constante.

Presentamos a continuación algunos factores de corte adoptando para todos los casos  $b = 0.05$  y  $h = 0.1$ . Consideramos dos (2) valores de  $t$  y tres (3) valores de  $\frac{h}{R_G}$ .

Previamente, con las expresiones (E10.1) para los  $\alpha_j^R$  y (2.44) para los  $\beta_j^R$  ( $j = 0, 1, 2$ ) (siempre  $\alpha_1^R = 0$ ) obtenemos.

$$t = 0.002$$

$\frac{h}{R_G}$	$\alpha_0^R$	$\alpha_2^R$	$\beta_0^R$	$\beta_1^R$	$\beta_2^R$
0.1	0.00058478	$0.77571e^{-6}$	0.000584	$-0.15509e^{-5}$	$0.77827e^{-6}$
0.5	0.0030221	$0.39446e^{-5}$	0.0001168	$-0.15641e^{-5}$	$0.17084e^{-6}$
1	0.006816	$0.83629e^{-5}$	0.000584	$-0.16115e^{-5}$	$0.111695e^{-6}$

$$t = 0.004$$

$\frac{h}{R_G}$	$\alpha_0^R$	$\alpha_2^R$	$\beta_0^R$	$\beta_1^R$	$\beta_2^R$
0.1	0.0011374	$0.14422e^{-6}$	0.001136	$-0.288348e^{-5}$	$0.77827e^{-6}$
0.5	0.0058694	$0.733026e^{-5}$	0.0002272	$-0.29073e^{-5}$	$0.17084e^{-6}$
1	0.0131565	0.000015512	0.0001136	$-0.299242e^{-5}$	$0.111695e^{-6}$

(E11.1)

Entonces

$$t = 0.002$$

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	1	0.9987	1.6184
0.5	0.2	0.1932	1.6700
1	0.1	0.08568	1.9032

$$t = 0.004$$

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	1	0.9987	1.5939
0.5	0.2	0.1935	1.6386
1	0.1	0.08635	1.8356



- **Ejemplo 12:** BARRA CURVA DE SECCIÓN RECTANGULAR NO HOMOGÉNEA CON TRES (3) SUBDOMINIOS DE IGUAL ANCHO Y DISTINTA ALTURA. (Ver Figura Ej.12)

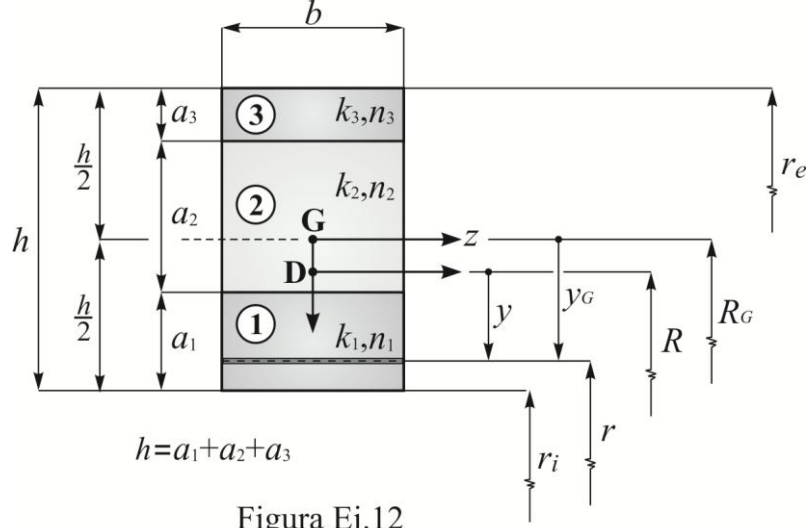


Figura Ej.12

Los valores del módulo de elasticidad y del módulo transversal de elasticidad varían a saltos,  $E(y_G, z) = \varphi_1(y_G, z)E_0$  y  $G(y_G, z) = \varphi_2(y_G, z)G_0$

$$\begin{aligned}
 \text{Sector 1} & : y_G \in \left(\frac{h}{2} - a_1, \frac{h}{2}\right) ; \quad \varphi_1(y_G, z) = k_1 ; \quad \varphi_2(y_G, z) = n_1 \\
 \text{Sector 2} & : y_G \in \left(-\frac{h}{2} + a_3, \frac{h}{2} - a_1\right) ; \quad \varphi_1(y_G, z) = k_2 ; \quad \varphi_2(y_G, z) = n_2 \\
 \text{Sector 3} & : y_G \in \left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + a_3\right) ; \quad \varphi_1(y_G, z) = k_3 ; \quad \varphi_2(y_G, z) = n_3
 \end{aligned} \quad (\text{E12.1})$$

Además

$$\begin{aligned}
 \Omega &= bh \\
 \lambda^R(y_G) &= \begin{cases} k_1 b & : y_G \in \left(\frac{h}{2} - a_1, \frac{h}{2}\right) \\ k_2 b & : y_G \in \left(-\frac{h}{2} + a_3, \frac{h}{2} - a_1\right) \\ k_3 b & : y_G \in \left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + a_3\right) \end{cases} \\
 \alpha_0^R &= b \left[ k_1 \ln \left( \frac{r_i + a_1}{r_i} \right) + k_2 \ln \left( \frac{r_e - a_3}{r_i + a_1} \right) \right] + k_3 \ln \left( \frac{r_e}{r_e - a_3} \right) \\
 R &= \frac{b(k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3)}{\alpha_0^R} \\
 \alpha_2^R &= b \left[ k_1 a_1 \left( r_i + \frac{a_1}{2} \right) + k_2 a_2 \left( r_i + a_1 + \frac{a_2}{2} \right) + k_3 a_3 \left( r_e - \frac{a_3}{2} \right) \right]
 \end{aligned} \quad (\text{E12.2})$$

El régimen de tensiones tangenciales está conformado, como siempre, por la suma de una solución homogénea más una particular, que debe satisfacer las siguientes ecuaciones diferenciales de equilibrio:

$$r \cdot \left( \frac{\partial \tau_{j\alpha r}}{\partial r} - \frac{\partial \tau_{j\alpha z}}{\partial z} \right) + 2\tau_{j\alpha r} = k_j Q \left( V + \frac{U}{r} \right) \quad (j=1, 2, 3) \quad (E12.3)$$

Los valores de  $Q$ ,  $U$  y  $V$  corresponden a la sección total no homogénea. Recordemos que:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{R^2}{J^R} & ; & \quad U = -V \left( R + \frac{J^R}{A^R R} \right) \\ A^R &= R \cdot \alpha_0^R & ; & \quad J^R = R \cdot \alpha_2^R \end{aligned} \quad (E12.4)$$

Por ser una sección rectangular en tanto no conduzca a ninguna contradicción, adoptamos

$$\tau_{j\alpha z} \equiv 0 \quad (j=1, 2, 3) \quad (E12.5)$$

A su vez

$$\tau_{j\alpha r} = \tau_{j\alpha r}^H + \tau_{j\alpha r}^P \quad (j=1, 2, 3) \quad (E12.6)$$

De la PARTE CUARTA tenemos que

$$\tau_{j\alpha r}^H = k_j \frac{C_j}{r^2} Q \quad (j=1, 2, 3) \quad (E12.7)$$

Por otro lado proponemos como solución particular para cada sector las siguientes expresiones: (esta solución particular no se analizó en la PARTE CUARTA)

$$\tau_{j\alpha r}^P = k_j Q \left( \frac{V}{2} + \frac{U}{r} \right) \quad (j=1, 2, 3) \quad (E12.8)$$

El equilibrio está satisfecho idénticamente. Tenemos tres (3) incógnitas -  $C_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) - y nos resta cumplir con las CB y las condiciones de continuidad en las fronteras comunes. O sea

$$\begin{aligned} \tau_{1\alpha r} \left( \frac{h}{2}, z \right) &= \tau_{3\alpha r} \left( -\frac{h}{2}, z \right) = 0 \\ \tau_{1\alpha r} \left( \frac{h}{2} - a_1, z \right) &= \tau_{2\alpha r} \left( \frac{h}{2} - a_1, z \right) \\ \tau_{2\alpha r} \left( -\frac{h}{2} + a_3, z \right) &= \tau_{3\alpha r} \left( -\frac{h}{2} + a_3, z \right) \end{aligned} \quad (E12.9)$$

En realidad de las cuatro (4) ecuaciones (E12.9) tenemos sólo tres (3) independientes, que permiten determinar las  $C_j (j=1, 2, 3)$ . Por otro lado, idénticamente se verifica también que

$$b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha r}(y_G, z) dy_G = Q \quad (\text{E12.10})$$

Entonces resolviendo, tendremos que:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{r_i}{2} (2U + r_i V) \\ C_2 &= \frac{[(k_1 - k_2)(r_i + a_1)^2 - k_1 r_i^2] V + 2[k_1 a_1 - k_2(r_i + a_1)]}{2k_2} \\ C_3 &= -\frac{r_e}{2} (2U + r_e V) \end{aligned} \quad (\text{E12.11})$$

La constante  $k_3$  que no aparece explícitamente en las expresiones de  $C_j (j=1, 2, 3)$ , sin embargo afecta a través de los valores  $U$  y  $V$ .

Presentamos algunos factores de corte y en todos los casos  $b=20$ ,  $h=60$ ,  $a_1=a_3=22$  y  $a_2=16$ . Se consideran tres (3) valores de la relación  $\frac{h}{R_G}$  para cada ejemplo y diversos valores de las constantes  $k_j$  y  $n_j (j=1, 2, 3)$ .

$$k_1 = k_2 = k_3 = n_1 = n_2 = n_3 = 1$$

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	600	599.4997	1.19997
0.5	120	117.4569	1.199258
1	60	54.6143	1.196620

$$k_1 = n_1 = 1; k_2 = n_2 = 2; k_3 = n_3 = 3$$

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	600	606.5459	1.269129
0.5	120	124.7963	1.30611
1	60	62.2575	1.35693

(E12.12)

$$k_1 = 1; k_2 = 2; k_3 = 3; n_1 = 3; n_2 = 2; n_3 = 1$$

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	600	606.5459	1.57439
0.5	120	124.7963	1.36808
1	60	62.2575	1.11937

$$k_1 = 3; k_2 = 2; k_3 = 1; n_1 = 1; n_2 = 2; n_3 = 3$$

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	600	592.6153	1.68243
0.5	120	110.9329	1.91281
1	60	48.6427	2.23884

$$k_1 = n_1 = 3; k_2 = n_2 = 2; k_3 = n_3 = 1$$

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	600	592.6153	1.25185
0.5	120	110.9329	1.21916
1	60	48.6427	1.18057

En la Figura Ej.12(a) se presenta el diagrama de tensiones  $\tau_{\alpha r}(y_G, z)/Q$  para  $\frac{h}{R_G} = 0.5$ , que incluye la distribución en los sectores 1, 2 y 3.

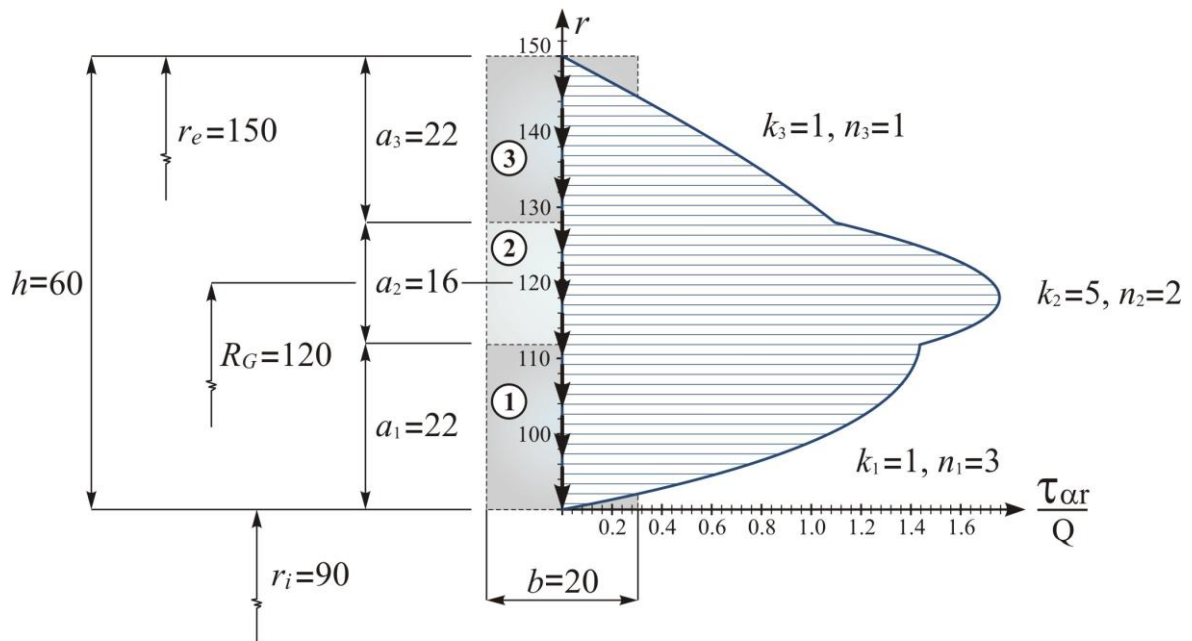


Figura Ej.12(a)

- **Ejemplo 13:** BARRA CURVA GRUESA DE SECCIÓN RECTANGULAR CON PARÁMETROS FUNCIONALMENTE GRADUADOS. (Ver Figura Ej.13)

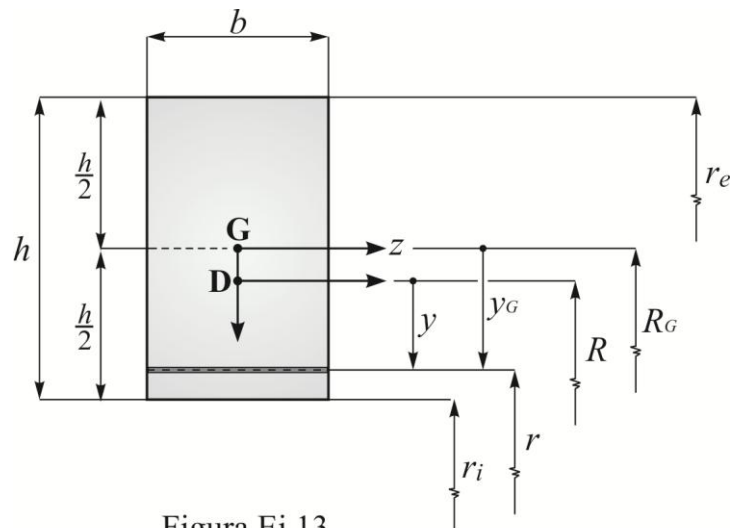


Figura Ej.13

Sea

$$\varphi_j(y_G, z) = \varphi_j(y_G) = k_j + \frac{(1-k_j)}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{2y_G}{h}\right)^n \quad (E13.1)$$

$(j = 1, 2, 3) ; n \text{ constante real}$

Para

$$y_G = \begin{cases} \frac{h}{2} & \varphi_j(y_G, z) = k_j \\ -\frac{h}{2} & \varphi_j(y_G, z) = 1 \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (E13.2)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} b(y_G) &= b \quad ; \quad \Omega = b h \quad (d\Omega = d y_G dz) \\ J_G &= \frac{b h^3}{12} \quad ; \quad r = R_G - y_G = R - y \end{aligned} \quad (E13.3)$$

Luego

$$\lambda^R(y_G, z) = \lambda^R(y_G) = b \varphi_1(y_G, z) = b \varphi_1(y_G) \quad (E13.4)$$

Los valores de  $\alpha_0^R$ ,  $R$  y  $\alpha_2^R$  para estos materiales deben calcularse, en general, numéricamente. Utilizamos las expresiones (2.17), (2.18) y (2.19).

La distribución tensional debe satisfacer, aceptando que  $\tau_{\alpha z} = 0$ , la siguiente ecuación diferencial de equilibrio:

$$-r \cdot \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial y_G} + 2\tau_{\alpha r} = \varphi_1(y_G) \left( V + \frac{U}{r} \right) Q \quad (E13.5)$$

Sabemos que

$$\tau_{\alpha r}(y_G) = \tau_{\alpha r}^H + \tau_{\alpha r}^P \equiv \psi(y_G) Q \quad (E13.6)$$

Por un lado, recurriendo a la PARTE CUARTA, tenemos que

$$\tau_{\alpha r}^H = \frac{C}{r^2} Q \quad (E13.7)$$

y por otro, no es difícil hallar que una solución particular es

$$\tau_{\alpha r}^P = [V g(y_G) + U f(y_G)] Q \quad (E13.8)$$

donde

$$\begin{aligned}
f(y_G) &\equiv \frac{k_1}{r} + \frac{k(1-k_1)\left(1 - \frac{2y_G}{h}\right)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)r^2} \\
g(y_G) &\equiv \frac{k_1}{2} + \frac{(1-k_1)\left(1 - \frac{2y_G}{h}\right)^n}{2^n(n+2)} \left[ 1 - \frac{(nr + r_i)r_i}{(n+1)r^2} \right]
\end{aligned} \tag{E13.9}$$

Del planteo indistinto de alguna de las siguientes CB

$$\tau_{\alpha r}\left(\frac{h}{2}, z\right) = \tau_{\alpha r}\left(-\frac{h}{2}, z\right) = 0 \tag{E13.10}$$

o bien de la condición de equilibrio global

$$b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha r}(y_G) dy_G = Q \tag{E13.11}$$

se obtiene que

$$C = -\frac{k_1 r_i^2}{2} \left( 2 \frac{U}{r_i} + V \right) \tag{E13.12}$$

Para obtener el factor de corte  $m$  recordemos que

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{R^2}{J^R} \quad ; \quad U = -V \left( R + \frac{J^R}{A^R R} \right) \\
A^R &= R \cdot \alpha_0^R \quad ; \quad J^R = R \cdot \alpha_2^R
\end{aligned} \tag{E13.13}$$

Entonces (ver (E13.1) y (E13.6))

$$m = \frac{A^R}{R} \iint_{\Omega} \frac{\psi^2(y_G)}{\varphi_2(y_G)} d\Omega \tag{E13.14}$$

Evidentemente

$$\psi(y_G) = \frac{C}{r^2} + V g(y_G) + U f(y_G) \tag{E13.15}$$

Calculemos algunos factores de corte para esta sección rectangular funcionalmente graduada de acuerdo a (E13.1). Consideraremos tres (3) valores de  $\frac{h}{R_G}$  y dos (2) valores del exponente  $n$ . Son fijos los valores de  $b = 20$ ,  $h = 60$ ,  $k_1 = 2.3$ ,  $k_2 = 1.8$

$$n = 1$$

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	600	595.5866	1.4160
0.5	120	113.6613	1.4221
1	60	51.0071	1.4282

$$n = 3$$

(E13.16)

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	600	596.5852	1.4554
0.5	120	114.7352	1.4610
1	60	52.1567	1.4667

- **Ejemplo 14:** BARRA CURVA GRUESA DE SECCIÓN RECTANGULAR CON PARÁMETROS FUNCIONALMENTE GRADUADOS. (Ver Figura Ej.13)

Sea

$$\varphi_j(y_G, z) = \varphi_j(y_G) = k_j \cdot e^{p_j \frac{h}{2} \left(1 - \frac{2y_G}{h}\right)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (\text{E14.1})$$

donde

$$p_j \equiv -\frac{\ln k_j}{h} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (\text{E14.2})$$

Observemos que si

$$y_G = \begin{cases} \frac{h}{2} & \Rightarrow \varphi_j(y_G, z) = k_j \\ -\frac{h}{2} & \Rightarrow \varphi_j(y_G, z) = 1 \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (\text{E14.3})$$

Tenemos además

$$\begin{aligned} b(y_G) &= b \quad ; \quad \Omega = b h \quad (d\Omega = d y_G dz) \\ J_G &= \frac{b h^3}{12} \quad ; \quad r = R_G - y_G = R - y \end{aligned} \quad (\text{E14.4})$$



Luego

$$\lambda^R(y_G, z) = \lambda^R(y_G) = b \varphi_1(y_G, z) = b \varphi_1(y_G) \quad (\text{E14.5})$$

Los valores de  $\alpha_0^R$ ,  $R$  y  $\alpha_2^R$  para estos materiales deben calcularse, en general, numéricamente. Utilizamos las expresiones (2.17), (2.18) y (2.19).

Imponemos una distribución de tensiones tangenciales tal que

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha z}(y_G, z) &= 0 \\ \tau_{\alpha r}(y_G, z) &= \frac{Q}{r^2} \left\{ C + \frac{\varphi_1(y_G)}{p_1^2} [U p_1 + V(r p_1 - 1)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{E14.6})$$

La misma satisface la siguiente ecuación diferencial de equilibrio interno en sentido del eje de la barra curva gruesa

$$-r \cdot \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial y_G} + 2\tau_{\alpha r} = \varphi_1(y_G) \left( V + \frac{U}{r} \right) Q \quad (\text{E14.7})$$

Para obtener la constante  $C$ , es indiferente hacerlo por cualquiera de las CB

$$\tau_{\alpha r}\left(\frac{h}{2}, z\right) = \tau_{\alpha r}\left(-\frac{h}{2}, z\right) = 0 \quad (\text{E14.8})$$

o bien por la resultante de la única tensión tangencial

$$b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha r}(y_G) dy_G = Q \quad (\text{E14.9})$$

Entonces

$$C = -\frac{k_1}{p_1^2} [U p_1 + V(r_i p_1 - 1)] \quad (\text{E14.10})$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} V &= -\frac{R^2}{J^R} & ; & & U &= -V \left( R + \frac{J^R}{A^R R} \right) \\ A^R &= R \cdot \alpha_0^R & ; & & J^R &= R \cdot \alpha_2^R \end{aligned} \quad (\text{E14.11})$$

Calculemos para esta sección funcionalmente graduada según (E14.1), algunos valores del factor de corte, que genéricamente vale

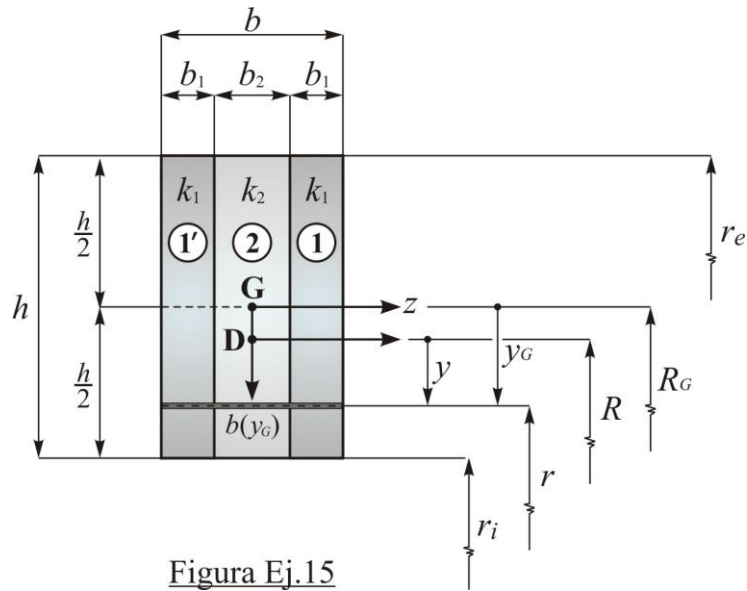
$$m = \frac{A^R}{R} \iint_{\Omega} \frac{\left( \frac{\tau_{\alpha r}}{Q} \right)^2}{\varphi_2(y_G)} r d\Omega \quad (\text{E14.12})$$

Imponemos  $b = 20$ ,  $h = 60$ ,  $k_1 = 2.3$ ,  $k_2 = 1.8$  con tres (3) valores de  $\frac{h}{R_G}$ .

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	600	595.4000	1.3825
0.5	120	113.4416	1.3894
1	60	50.7499	1.3972

(E14.13)

- **Ejemplo 15:** BARRA CURVA DE SECCIÓN RECTANGULAR NO HOMOGÉNEA CON TRES (3) FAJAS DE IGUAL ALTURA Y MÓDULOS DIFERENTES. SOLUCIÓN A TRAVÉS DEL MÉTODO I DE SUPERPOSICIÓN (Ver Figura Ej.15)



En las fajas 1 y 1'

$$\varphi_1(y_G, z) = k_1 \quad ; \quad \varphi_2(y_G, z) = n_1 \quad (\text{E15.1})$$

En el dominio 2

$$\varphi_1(y_G, z) = k_2 \quad ; \quad \varphi_2(y_G, z) = n_2 \quad (\text{E15.2})$$

Definimos

$$\Omega = bh \quad ; \quad \Omega_1 = b_1 h \quad ; \quad \Omega_2 = b_2 h \quad (\text{E15.3})$$

El ancho  $b(y_G)$  vale

$$b(y_G) = \begin{cases} b_1 & : z \in \left(-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2} + b_1\right) \\ b_2 & : z \in \left(-\frac{b}{2} + b_1, \frac{b}{2} - b_1\right) \\ b_1 & : z \in \left(\frac{b}{2} - b_1, \frac{b}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{E15.4})$$

De esta manera

$$\lambda^R(y_G) = \frac{1}{h} (2 k_1 \Omega_1 + k_2 \Omega_2) = \lambda^R \text{ (constante)} \quad (\text{E15.5})$$

También, de acuerdo a las correspondientes definiciones, tenemos que

$$\alpha_0^R = \lambda^R \ln \left( \frac{2 + h/R_G}{2 - h/R_G} \right) \quad ; \quad R = \frac{h \lambda^R}{\alpha_0^R}$$

$$\alpha_2^R = R \alpha_0^R (R_G - R) = h \lambda^R (R_G - R) \quad (\text{E15.6})$$

$$A^R = R \alpha_0^R = h \lambda^R \quad ; \quad J^R = R \alpha_2^R = R h \lambda^R (R_G - R)$$

$$V = -\frac{R^2}{J^R} = -\frac{1}{\alpha_0^R (R_G - R)}$$

Es ventajoso emplear el MÉTODO I DE SUPERPOSICIÓN (PARTE TERCERA) puesto que se cumple la condición (3.17):

$$\iint_{\Omega} \varphi_1(y_G, z) y_G d\Omega = 0 \quad (\text{E15.7})$$

que nos conduce, tal como ocurría en secciones homogéneas, a que

$$U = -R_G V \quad (\text{E15.8})$$

Es natural superponer los regímenes tensionales de las siguientes dos (2) secciones rectangulares homogéneas I y II (Figura Ej15(a)).

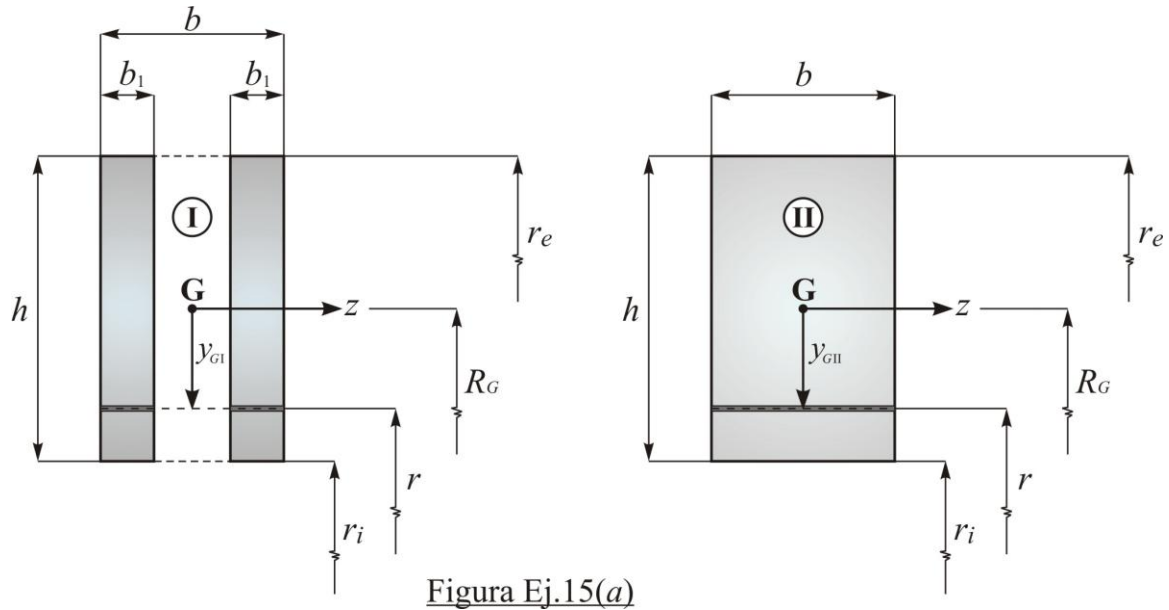


Figura Ej.15(a)

La sección I es la unión de los dominios 1 y 1'; la sección II coincide con la sección rectangular completa.

Debe observarse que las coordenadas  $y_G$  de las secciones I y II coinciden entre sí y con la de la sección no homogénea bajo estudio. O sea

$$y_{GI} = y_{GII} = y_G \quad (E15.9)$$

y entonces

$$R_{GI} = R_{GII} = R_G \quad (E15.10)$$

Calculemos las características físico-geométricas de las secciones homogéneas I y II:

$$\begin{aligned} \lambda_I^R &= \frac{2\Omega_1}{h} & ; & & \lambda_{II}^R &= \frac{\Omega}{h} \\ \alpha_{0I}^R &= \lambda_I^R \ln \left( \frac{2+h/R_G}{2-h/R_G} \right) = \frac{\alpha_0^R \lambda_I^R}{\lambda^R} & ; & & R_I &= \frac{2\Omega_1}{\alpha_{0I}^R} = \frac{h\lambda_I^R}{\alpha_{0I}^R} \\ \alpha_{0II}^R &= \lambda_{II}^R \ln \left( \frac{2+h/R_G}{2-h/R_G} \right) = \frac{\alpha_0^R \lambda_{II}^R}{\lambda^R} & ; & & R_{II} &= \frac{2\Omega_1}{\alpha_{0II}^R} = \frac{h\lambda_{II}^R}{\alpha_{0II}^R} \\ \alpha_{2I}^R &= R_I \alpha_{0I}^R (R_G - R_I) & ; & & \alpha_{2II}^R &= R_{II} \alpha_{0II}^R (R_G - R_{II}) \end{aligned} \quad (E15.11)$$

$$\begin{aligned}
A_I^R &= R_I \alpha_{0I}^R = 2 \Omega_I & ; & & A_{II}^R &= R_{II} \alpha_{0II}^R = \Omega \\
J_I^R &= R_I \alpha_{2I}^R = R_I \lambda_I^R (R_G - R_I) & ; & & J_{II}^R &= R_{II} \alpha_{2II}^R = R_{II} \lambda_{II}^R (R_G - R_{II}) \\
V_I &= -\frac{R_I^2}{J_I^R} = -\frac{1}{\alpha_{0I}^R (R_G - R_I)} & ; & & V_{II} &= -\frac{R_{II}^2}{J_{II}^R} = -\frac{1}{\alpha_{0II}^R (R_G - R_{II})}
\end{aligned}$$

Es sencillo ver que

$$\begin{aligned}
R &= R_I = R_{II} = \frac{h \lambda^R}{\alpha_0^R} \\
J_I^R \lambda_{II}^R &= J_{II}^R \lambda_I^R & ; & & V_I \lambda_I^R &= V_{II} \lambda_{II}^R \\
\lambda^R &= (k_1 - k_2) \lambda_I^R + k_2 \lambda_{II}^R
\end{aligned} \tag{E15.12}$$

Por lo visto en el Ejemplo 8 podemos conocer la distribución de las tensiones tangenciales en las secciones rectangulares homogéneas I y II. En efecto. Respectivamente para fracciones  $Q_I$  y  $Q_{II}$  de  $Q$  tendremos

$$\begin{aligned}
\tau_{I\alpha r} &= \frac{Q_I h^2}{8 r^2} \left[ 1 - \left( \frac{2 y_G}{h} \right)^2 \right] V_I & ; & & \tau_{I\alpha z} &= 0 \\
\tau_{II\alpha r} &= \frac{Q_{II} h^2}{8 r^2} \left[ 1 - \left( \frac{2 y_G}{h} \right)^2 \right] V_{II} & ; & & \tau_{II\alpha z} &= 0
\end{aligned} \tag{E15.13}$$

bajo la evidente condición

$$Q_I + Q_{II} = Q \tag{E15.14}$$

O sea, en los dominios 1 y 1' de la sección bajo estudio

$$\tau_{\alpha r} = \tau_{I\alpha r} + \tau_{II\alpha r} \quad ; \quad \tau_{\alpha z} = 0 \tag{E15.15}$$

A su vez en el dominio 2

$$\tau_{\alpha r} = \tau_{II\alpha r} \quad ; \quad \tau_{\alpha z} = 0 \tag{E15.16}$$

Las tensiones asumidas deben satisfacer la ecuación diferencial de equilibrio interno para la sección original no homogénea, es decir:

$$-r \cdot \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial y_G} + 2 \tau_{\alpha r} = \varphi_1(y_G, z) \cdot V \left( 1 - \frac{R_G}{R} \right) \cdot Q \tag{E15.17}$$

No siendo  $\varphi_1(y_G, z)$  analítica, sino que varía “a saltos”, esta condición de equilibrio debe plantearse para cada faja, lo que da lugar al siguiente sistema lineal en  $Q_I$  y  $Q_{II}$ :

$$\begin{aligned} Q_I V_I + Q_{II} V_{II} - k_1 Q V &= 0 \\ Q_{II} V_{II} - k_2 Q V &= 0 \end{aligned} \quad (E15.18)$$

Resolviéndolo, el problema de hallar la distribución tensional en la sección rectangular con fajas de igual altura y distinto módulo elástico (figura Ej.15), ha finalizado.

Cabe llamar la atención sobre lo siguiente. Todavía podríamos tomar a  $V$  como una tercera incógnita utilizando (E15.14) y considerar tres (3) ecuaciones con tres (3) incógnitas. Sería una manera indirecta de calcular  $V$ . En definitiva

$$\begin{aligned} \Delta \cdot Q_I &= (k_1 - k_2) V_{II} Q \quad ; \quad \Delta \cdot Q_{II} = k_2 V_I Q \\ \Delta \cdot V &= V_I V_{II} \\ (\Delta &\equiv k_2 V_I + (k_1 - k_2) V_{II}) \end{aligned} \quad (E15.19)$$

La expresión de  $V$  recién encontrada por supuesto coincide con la presentada en la expresión (E15.6), aunque no en apariencia..

Conocida, entonces, la distribución de las  $\tau_{\alpha r}$  para la sección no homogénea, estamos en condiciones de calcular el factor de corte “ $m$ ”

$$\begin{aligned} m &= \frac{A^R}{R} \iint_{\Omega} \frac{\left( \frac{\tau_{\alpha r}}{Q} \right)^2}{\varphi_2(y_G, z)} r d\Omega \\ (d\Omega &= d y_G d z) \end{aligned} \quad (E15.20)$$

o también

$$m = \frac{A^R}{Q^2 R} \left[ \frac{2 b_1}{n_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{I\alpha r} + \tau_{II\alpha r})^2 r d y_G + \frac{b_2}{n_2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{II\alpha r}^2 r d y_G \right] \quad (E15.21)$$

Presentamos a continuación una aplicación numérica. Sean  $h = 60$ ,  $b = 25$ ,  $b_1 = 7.5$ ,  $k_1 = 1.8$ ,  $k_2 = 2.3$ ,  $n_1 = 1.1$ ,  $n_2 = 1.9$ . Tomamos tres (3) valores de  $\frac{h}{R_G}$ .

$\frac{h}{R_G}$	$R_G$	$R$	$m$
0.1	600	599.4997	1.7285
0.5	120	117.4569	1.7275
1	60	54.6144	1.7237

(E15.22)

### APLICACIÓN 1.3. TENSIONES TANGENCIALES Y FACTOR DE CORTE EN BARRAS RECTAS GRUESAS FICTICIAS

▪ Ejemplo 16: BARRA RECTA FICTICIA DE SECCIÓN TRAPEZOIDAL HOMOGÉNEA (Ver Figura Ej.1)

Recordemos que la utilización de la teoría de barras rectas ficticias permite hallar las tensiones tangenciales de barras curvas gruesas a través del resultado fundamental que hemos desarrollado en la PARTE SEGUNDA SECCIÓN 2.7.

En el presente ejemplo tenemos  $\varphi_j(y_G, z) = 1$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Además  $y = y_G$ . Entonces la distribución de las tensiones debe verificar la ecuación de equilibrio interno dada por (2.72) con  $\mathcal{K} = 0$ :

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = -\frac{Q}{J^R} y_G \quad (\text{E16.1})$$

Como vemos, si bien con otra nomenclatura, es formalmente la misma ecuación (1.26) que corresponde a barras rectas gruesas con sección homogénea donde el término independiente constante valía  $-\frac{Q}{J^\infty} y_G$ . Es decir cambiando en el Ejemplo 1,  $J_G = J^\infty$  de barras rectas por  $J^R$  de barras curvas, el problema del presente Ejemplo 16 está solucionado. O sea  $\tau_y$  y  $\tau_z$  coinciden con las expresiones dadas por (E1.12) y (E1.13).

Efectuando el cambio indicado por (2.71):

$$\tau_{\alpha r} \equiv \tau_y \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad ; \quad \tau_{\alpha z} \equiv \tau_z \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad (\text{E16.2})$$

obtenemos las tensiones de la barra curva gruesa que como es fácil comprobar, a su vez coinciden con las encontradas en el Ejemplo 7, cuando directamente se resolvió la barra curva de sección trapezoidal homogénea.

- **Ejemplo 17:** BARRA RECTA FICTICIA DE SECCIÓN RECTANGULAR NO HOMOGÉNEA CON TRES (3) SUBDOMINIOS DE IGUAL ANCHO Y DISTINTO MATERIAL (Ver Figura Ej.12)

Los valores del módulo de elasticidad y del módulo transversal de elasticidad varían “a saltos”,  $E(y_G, z) = \varphi_1(y_G, z)E_0$  y  $G(y_G, z) = \varphi_2(y_G, z)G_0$ :

$$\begin{aligned} \text{Sector 1} & : y_G \in \left(\frac{h}{2} - a_1, \frac{h}{2}\right) ; \quad \varphi_1(y_G, z) = k_1 ; \quad \varphi_2(y_G, z) = n_1 \\ \text{Sector 2} & : y_G \in \left(-\frac{h}{2} + a_3, \frac{h}{2} - a_1\right) ; \quad \varphi_1(y_G, z) = k_2 ; \quad \varphi_2(y_G, z) = n_2 \\ \text{Sector 3} & : y_G \in \left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + a_3\right) ; \quad \varphi_1(y_G, z) = k_3 ; \quad \varphi_2(y_G, z) = n_3 \end{aligned} \quad (\text{E17.1})$$

Entonces de acuerdo a (E17.1) y a la expresión (2.73) tendremos:

$$\frac{J^R \Gamma(y_G, z)}{\mathcal{K} - y_G} = \begin{cases} k_1 & : y_G \in \left(\frac{h}{2} - a_1, \frac{h}{2}\right) \\ k_2 & : y_G \in \left(-\frac{h}{2} + a_3, \frac{h}{2} - a_1\right) \\ k_3 & : y_G \in \left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + a_3\right) \end{cases} \quad (\text{E17.2})$$

Los valores de  $\mathcal{K}$  y  $J^R$  corresponden a la barra curva bajo estudio. Es decir deben calcularse los parámetros comunes de barras curvas:  $\lambda^R$ ,  $\alpha_0^R$ ,  $\alpha_2^R$  y  $R$ .

Para satisfacer la ecuación de equilibrio interno del caso de secciones no homogéneas de barras ficticias dada por la expresión (2.73) adoptamos para cada Sector  $j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) la siguiente distribución de tensiones tangenciales:

$$\begin{cases} \tau_{jy}(y_G, z) = \tau_{jy}(y_G) = \frac{k_j \cdot Q}{J^R} \left( C_j + \mathcal{K} y_G - \frac{y_G^2}{2} \right) \\ \tau_{jz} \equiv 0 \end{cases} \quad (\text{E17.3})$$

$(j = 1, 2, 3)$



Debemos imponer las  $CB$  y de continuidad en las fronteras comunes. O sea:

$$\begin{aligned}\tau_{1y}\left(\frac{h}{2}\right) &= \tau_{3y}\left(-\frac{h}{2}\right) = 0 \\ \tau_{1y}\left(\frac{h}{2} - a_1\right) &= \tau_{2y}\left(\frac{h}{2} - a_1\right) \\ \tau_{2y}\left(-\frac{h}{2} + a_3\right) &= \tau_{3y}\left(-\frac{h}{2} + a_3\right)\end{aligned}\quad (E17.4)$$

En apariencia, si conociéramos  $\mathcal{K}$ , tendríamos un sistema de cuatro (4) ecuaciones con tres (3) incógnitas; pero como estamos partiendo de una condición de equilibrio, el sistema (E17.4), permite de forma indirecta (y sin recurrir a la teoría de barras curvas) hallar -con la coincidencia que corresponde- también  $\mathcal{K}$  junto con las constantes  $C_j$  ( $j = 1, 2, 3$ )

En efecto resolviendo encontramos

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{h}{8}(h - 4\mathcal{K}) \quad ; \quad C_3 = \frac{h}{8}(h + 4\mathcal{K}) \\ C_2 &= -\frac{\mathcal{K}}{k_2}\left[\frac{k_2 h}{2} + a_1(k_1 - k_2)\right] + \frac{1}{8}(h - 2a_1)^2 + \frac{k_1 a_1}{2k_2}(h - a_1) \\ \mathcal{K} &= \frac{k_1 a_1(a_2 + a_3) + k_2 a_2(a_3 - a_1) - k_3 a_3(a_1 + a_2)}{2 \sum_{j=1}^3 k_j a_j}\end{aligned}\quad (E17.5)$$

De acuerdo al resultado fundamental las tensiones para cada zona de la barra curva serán:

$$\begin{aligned}\tau_{j\alpha r} &= \tau_{jy}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad ; \quad \tau_{j\alpha z} = 0 \\ (j &= 1, 2, 3)\end{aligned}\quad (E17.6)$$

Es sencillo verificar que estas expresiones de las tensiones tangenciales coinciden con las halladas directamente como barra curva gruesa en el Ejemplo 12.

Cabe agregar que de la condición de equilibrio global

$$b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha r}(y_G) dy_G = Q \quad (E17.7)$$

podríamos indirectamente calcular  $J^R$ .

Un comentario adicional. Sería posible encarar el mismo problema empleando el MÉTODO II DE SUPERPOSICIÓN que vimos en la PARTE TERCERA. No incluimos el procedimiento que dejamos como ejercicio para el lector interesado en familiarizarse con estas teorías, y que como fue previamente dicho, son una extensión muy profunda de las expresiones clásicas de Collignon que la bibliografía sólo desarrolla para barras rectas homogéneas.

- **Ejemplo 18:** BARRA RECTA FICTICIA DE SECCIÓN TRAPEZOIDAL DE MATERIAL FUNCIONALMENTE GRADUADO (Ver Figura Ej.7)

El material funcionalmente graduado de cada sección esta gobernado por la distribución dada a continuación:

$$\varphi_j(y_G, z) = \varphi_j(y_G) = k_j \cdot e^{p_j(h_i - y_G)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (E18.1)$$

donde

$$p_j \equiv -\frac{\ln k_j}{h} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (E18.2)$$

$$h_e = \frac{h}{3} \cdot \frac{(2b_i + b_e)}{b_i + b_e} \quad ; \quad h_i = \frac{h}{3} \cdot \frac{(2b_e + b_i)}{b_i + b_e}$$

Definimos al ancho variable de la sección trapezoidal como

$$b(y_G) = 2T(h_i - y_G) + b_i \quad (E18.3)$$

siendo

$$T \equiv \operatorname{tg} \phi = \frac{b_e - b_i}{2h} \quad (E18.4)$$

Pasamos a resolver una barra curva gruesa por medio del RESULTADO FUNDAMENTAL visto en el ítem 2.7 de la PARTE SEGUNDA donde desarrollamos la teoría de barras rectas gruesas ficticias.

Debe verificarse entonces que el régimen de tensiones tangenciales que propondremos deberá satisfacer la ecuación de equilibrio interno (2.72).

Teniendo en cuenta la expresión (2.74), para el presente caso obtenemos que

$$\Gamma(y_G, z) = \Gamma(y_G) = \frac{\varphi_1(y_G)}{J^R} (\mathcal{K} - y_G) = \frac{k_1}{J^R} (\mathcal{K} - y_G) \cdot e^{p_j (h_i - y_G)} \quad (\text{E18.5})$$

que todavía podemos presentar, simplificando la nomenclatura, de la forma siguiente:

$$\Gamma(y_G) \equiv (\mathcal{A} - \mathcal{B} y_G) \cdot e^{(\alpha - \beta y_G)} \quad (\text{E18.6})$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv \frac{k_1}{J^R} \mathcal{K} & ; & & \mathcal{B} &\equiv \frac{k_1}{J^R} \\ \alpha &\equiv p_1 h_i & ; & & \beta &\equiv p_1 \end{aligned} \quad (\text{E18.7})$$

No es difícil ver que para esta especial distribución del módulo de Young, para satisfacer la ecuación (2.72) y las *CB* (nulidad de las componentes normales a las fronteras externas) bastará proponer que:

$$\begin{aligned} \tau_y &= \left[ g(y_G) - \frac{\mathcal{A}}{\beta} \cdot e^{(\alpha - \beta y_G)} \right] Q \\ \tau_z &= -z \left[ g'(y_G) + \mathcal{B} y_G \cdot e^{(\alpha - \beta y_G)} \right] Q \end{aligned} \quad (\text{E18.8})$$

La *CB* sobre el lado inclinado conduce a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en  $g(y_G)$  a coeficientes variables, que resuelta conduce a:

$$b(y_G)g(y_G) = C + \frac{\mathcal{B}\beta b_i(1 + \mathcal{B}y_G) + 2T\{\mathcal{A}\beta + \mathcal{B}[(1 + \mathcal{B}y_G)(\beta h_i - 2) - \beta^2 y_G^2]\}}{\beta^3} \cdot e^{(\alpha - \beta y_G)} \quad (\text{E18.9})$$

$C$  es la constante de integración.

Por las otras dos (2) *CB*, si ya conocemos  $\mathcal{K}$ , podemos, indistintamente, determinar el valor de  $C$ .

Cabe también la posibilidad de tomar como incógnitas a  $C$  y  $\mathcal{K}$ , plantear las dos (2) *CB* en  $y_G = h_i$  e  $y_G = -h_e$  y obtenerlas. Será una forma indirecta de deducir  $\mathcal{K}$ . Luego:

$$\begin{aligned} C &= - \frac{k_1 h (b_e^2 - p_1 h b_i b_e - b_i^2)}{p_1 J^R [(b_e - b_i)(1 - k_1) + (b_e - k_1 b_i) p_1 h]} \\ \mathcal{K} &= \frac{F p_1^2 h^2 - 2 G p_1 h + H}{3 p_1 \left\{ (b_e^2 - b_i^2)(1 - k) - p_1 h [b_e^2 + b_i b_e (1 - k) - k b_i^2] \right\}} \end{aligned} \quad (\text{E18.10})$$

$$\begin{aligned} \text{F} &\equiv b_e^2 + k_1 b_i^2 + 2 b_i b_e (1+k) \\ \text{G} &\equiv 2 b_i b_e (1-k) + b_e^2 (2+k) - b_i^2 (1+2k) \\ \text{H} &\equiv 6(1-k)(b_e^2 - b_i^2) \end{aligned} \quad (\text{E18.11})$$
$$\tau_{\alpha r} \equiv \tau_y \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad ; \quad \tau_{\alpha z} \equiv \tau_z \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad (\text{E18.12})$$

- 

En este caso aceptamos  $\varphi_j(y_G, z) = 1$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Además  $y = y_G$ . Entonces la distribución de las tensiones debe verificar la ecuación de equilibrio interno dada por (2.72) con  $\mathcal{K} = 0$ :

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y_G} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = -\frac{Q}{J^R} y_G \quad (\text{E19.1})$$

Un régimen tensional que satisface idénticamente esta ecuación de equilibrio es:

$$\begin{aligned} \tau_y(y_G, z) &= \tau_y(y_G) = g(y_G) \\ \tau_z(y_G, z) &= -z \left[ g'(y_G) + \frac{y_G Q}{J^R} \right] \end{aligned} \quad (\text{E19.2})$$

La función  $g(y_G)$  surgirá del planteo de la  $CB$  sobre el contorno elíptico  $(\mathcal{C})$  de la sección. Para llegar a la misma comenzamos indicando la ecuación paramétrica de  $(\mathcal{C})$ :

$$(\mathcal{C}): \begin{cases} y_G = B \sin \phi \\ z_G = A \cos \phi \left( = \frac{b(y_G)}{2} \right) \end{cases} \quad (\text{E19.3})$$

donde  $A$  y  $B$ , como se desprende de la figura son los radios de la elipse según " $z$ " e " $y$ " respectivamente y datos constantes del problema. A su vez el ancho variable de la sección vale:

$$b(y_G) = 2A \cos \phi = 2A \sqrt{1 - \left(\frac{y_G}{B}\right)^2} \quad (\text{E19.4})$$

Introducimos también las expresiones de los cosenos directores  $n_2$  y  $n_3$  de la normal al contorno según respectivamente las coordenadas  $y$  y  $z$ :

$$n_2 = \sin \beta = \frac{A \sin \phi}{\sqrt{A^2 \sin^2 \phi + B^2 \cos^2 \phi}} \quad ; \quad n_3 = \cos \beta = \frac{B \cos \phi}{\sqrt{A^2 \sin^2 \phi + B^2 \cos^2 \phi}} \quad (\text{E19.5})$$

NOTA: Para deducir (E19.5) vemos que

$$\begin{aligned} ds^2 = dy_G^2 + dz_G^2 &\Rightarrow \left( \frac{ds}{d\phi} \right)^2 = \left( \frac{dy_G}{d\phi} \right)^2 + \left( \frac{dz_G}{d\phi} \right)^2 = A^2 \sin^2 \phi + B^2 \cos^2 \phi \\ &\Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{A^2 \sin^2 \phi + B^2 \cos^2 \phi}} \end{aligned} \quad (\text{E19.6})$$

luego

$$\begin{aligned} n_2 = \sin \beta &= -\frac{dz_G}{ds} = -\frac{dz_G}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \\ n_3 = \cos \beta &= \frac{dy_G}{ds} = \frac{dy_G}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \end{aligned} \quad (\text{E19.7})$$

Estamos en condiciones de plantear la condición de reciprocidad sobre el contorno ( $\mathcal{C}$ ). La componente normal de la tensión tangencial al mismo debe ser nula, puesto que por hipótesis la superficie lateral de la barra está descargada. O sea:

$$\tau_y(y_G)n_2 + \tau_z\left(y_G, \frac{b(y_G)}{2}\right)n_3 = 0 \quad (\text{E19.8})$$

De acuerdo a (E19.2), (E19.3) y a (E19.4) e introduciendo por simplificación algebraica como:

$$\begin{aligned} g(y_G) &= g(B \sin \phi) = F(\phi) \\ \Rightarrow g'(y_G) &= F'(\phi) \frac{d\phi}{dy_G} = \frac{F'(\phi)}{B \cos \phi} \end{aligned} \quad (\text{E19.9})$$

la CB (E19.8) da lugar a la siguiente ecuación diferencial en  $F(\phi)$ :

$$\begin{aligned} F'(\phi) - \operatorname{tg} \phi F(\phi) + \frac{Q}{J_R} \sin \phi \cos \phi &= 0 \\ \left(-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{E19.10})$$

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria a coeficientes variables vale:

$$F(\phi) = \frac{C}{\cos \phi} + \frac{B^2}{3} \cos^2 \phi \frac{Q}{J^R} \quad (\text{E19.11})$$

siendo C una constante de integration.

Por (E19.9) será entonces:

$$\begin{aligned} g(y_G) &= \frac{B}{\sqrt{B^2 - y_G^2}} C + (B^2 - y_G^2) \frac{Q}{3 J^R} \\ (-B < y_G < B) \end{aligned} \quad (\text{E19.12})$$

La función  $g(y_G)$  queda definida en el intervalo abierto  $-B < y_G < B$ . Por lo tanto la constante C queda libre y debe determinarse con la condición:

$$\tau_y(-B) = \tau_y(B) = 0 \quad (\text{E19.13})$$

Por lo tanto  $C = 0$ .

En definitiva la distribución de tensiones tangenciales para la barra recta ficticia de sección elíptica es:

$$\tau_y = \frac{(B^2 - y_G^2)}{3} \frac{Q}{J^R} \quad ; \quad \tau_z = -\frac{y_G z}{3} \frac{Q}{J^R} \quad (\text{E19.14})$$

Como se observa las tensiones no dependen del radio  $A$ . La solución vale para cualquier sección elíptica donde denominamos al radio según "y" como  $B$ . La sección circular de radio  $B$  está incluida como caso particular.

Para que la solución quede definida completamente, debemos conocer las características geométricas de la barra curva, que es la que en realidad estamos abordando.

*NOTA:* Si  $R_G \rightarrow \infty$  entonces  $J^R \rightarrow J_G$  (momento de inercia baricéntrico respecto del eje  $z_G$ ) tendremos una barra recta de sección elíptica donde:

$$\tau_{xy} = \frac{(B^2 - y_G^2)}{3} \frac{Q}{J_G} \quad ; \quad \tau_{xz} = -\frac{y_G z}{3} \frac{Q}{J_G} \quad (\text{E19.15})$$

Son los valores clásicos de Collignon, que se encuentran en la bibliografía para una barra recta de sección circular de radio  $B$ .

Finalmente las tensiones tangenciales para la barra curva de sección elíptica se encuentran utilizando las expresiones (2.71).

- **Ejemplo 20:** BARRA RECTA FICTICIA DE SECCIÓN RECTANGULAR DE MATERIAL FUNCIONALMENTE GRADUADO. APLICACIÓN DEL TEOREMA GENERAL PARA HALLAR LOS FACTORES DE CORTE (Ver Figura Ej.20)

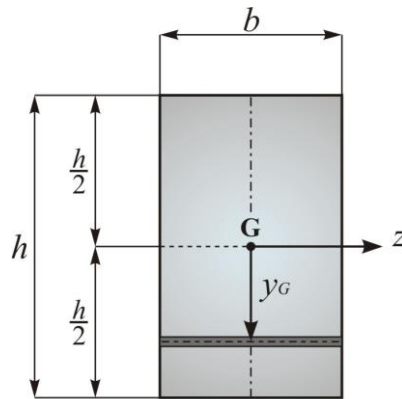


Figura Ej.20

Sea la variación del módulo de Young la siguiente:

$$\varphi_1(y_G, z) = \varphi_1(y_G, -z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \mu_1 \left( \frac{2z}{b} \right)^2 \right] \left[ 1 + k_1 - (1 - k_1) \left( \frac{2y_G}{h} \right) \right] \quad (\text{E20.1})$$

donde  $\mu_1$  y  $k_1$  son constantes reales arbitrarias.

Entonces por (1.10) (ó (2.10)):

$$\lambda = \lambda(y_G) = \frac{b(3 + \mu_1)}{6} \left[ (1 + k_1) - (1 - k_1) \left( \frac{2y_G}{h} \right) \right] \quad (\text{E20.2})$$

Introducimos:

$$\Omega = b h \quad ; \quad J_G = \frac{b h^3}{12} \quad (\text{E20.3})$$

De la teoría de barras rectas gruesas hallamos de (1.17), (1.18), (1.19) y (1.20):

$$A^\infty = \alpha_0^\infty = \frac{\Omega (1 + k_1)(3 + \mu_1)}{6} \quad (a)$$

$$\Delta = \frac{h}{6} \frac{(1 - k_1)}{(1 + k_1)} \quad (b) \quad (\text{E20.4})$$

$$\begin{aligned} J^\infty = \alpha_2^\infty &= \frac{\Omega (3 + \mu_1)}{72} \left[ (12\Delta^2 + h^2)(1 + k_1) + 4\Delta h(1 - k_1) \right] = \\ &= \frac{J_G (3 + \mu_1)}{18(1 + k_1)} \left[ 3(1 + k_1)^2 - (1 - k_1)^2 \right] \end{aligned} \quad (c)$$

De la teoría de barras curvas gruesas, de acuerdo a las expresiones (2.9), (2.16) y siguientes, con  $p \equiv \frac{h}{R_G}$ :

$$\alpha_0^R = \frac{b(3 + \mu_1)}{6} \left\{ \left[ 1 + k_1 - \frac{2(1 - k_1)}{p} \right] \ln \left( \frac{2+p}{2-p} \right) + 2(1 - k_1) \right\} \quad (a)$$

$$R = \frac{\alpha_0^\infty}{\alpha_0^R} \quad (b) \quad ; \quad \alpha_2^R = \alpha_0^\infty (R_G - R - \Delta) \quad (c) \quad (\text{E20.5})$$

$$A^R = R \alpha_0^R \quad (d) \quad ; \quad J^R = R \alpha_2^R \quad (e)$$

Resolvemos la ecuación (2.77) para barras rectas ficticias. Para ello proponemos:

$$\begin{aligned} \frac{J^R}{Q} \tau_y &= \int_0^{y_G} \varphi_1(y_G, z) (\Delta - y_G) d y_G + F(z) \quad (a) \\ \frac{J^R}{Q} \tau_z &= 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (\text{E20.6})$$



Es decir que obtenemos:

$$\frac{J^R}{Q} \tau_y = \left[ 1 + \mu_1 \left( \frac{2z}{b} \right)^2 \right] \left\{ \frac{(1-k_1)}{3h} y_G^3 - \frac{[h(1+k_1) + 2\Delta(1-k_1)]}{4h} y_G^2 + \frac{\Delta(1+k_1)}{2} y_G \right\} + F(z) \quad (\text{E20.7})$$

La tensión ficticia (E20.7) satisface la ecuación (2.77) (con  $\tau_z = 0$ ) y debemos determinar  $F(z)$  para satisfacer las condiciones de reciprocidad en  $y_G = \pm \frac{h}{2}$ , es decir

$$\tau_y \left( \pm \frac{h}{2}, z \right) = 0 \quad (\text{E20.8})$$

Recordemos que en realidad las CB deben plantearse para las tensiones  $\tau_{\alpha r}$  y  $\tau_{\alpha z}$  de barras curvas; en este caso como sabemos es equivalente a imponer la (E20.8). Es sencillo inferir que:

$$F(z) = \frac{h}{48} \left[ 1 + \mu_1 \left( \frac{2z}{b} \right)^2 \right] [6\Delta(3+k_1) + h(5+k_1)] \quad (\text{E20.9})$$

Entonces la expresión (E20.7) teniendo en cuenta (E20.9) vale

$$\begin{aligned} \frac{J^R}{Q} \tau_y = & \left[ 1 + \mu_1 \left( \frac{2z}{b} \right)^2 \right] \left\{ \frac{(1-k_1)}{3h} y_G^3 - \frac{[h(1+k_1) + 2\Delta(1-k_1)]}{4h} y_G^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta(1+k_1)}{2} y_G + \frac{h}{48} [6\Delta(3+k_1) + h(5+k_1)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{E20.10})$$

Estamos en situación de recurrir al TEOREMA GENERAL y entonces por las expresiones (2.79) habiendo resuelto una barra recta ficticia conocemos la distribución tensional de una barra recta gruesa con la misma sección no homogénea, o sea:

$$\tau_{xy} = \frac{J^R}{J^\infty} \tau_y \quad ; \quad \tau_{xz} = \frac{J^R}{J^\infty} \tau_z \quad (\text{E20.11})$$

Análogamente recurriendo a la propuesta (2.71) hallamos las tensiones tangenciales para una barra curva gruesa siempre con igual sección transversal, es decir:

$$\tau_{\alpha r} \equiv \tau_y \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad ; \quad \tau_{\alpha z} \equiv \tau_z \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad (\text{E20.12})$$

Puede comprobarse que se satisfacen idénticamente las condiciones (2.81).

Calculemos para la barra recta gruesa y algunas barras curvas gruesas el factor de corte " $m$ ", aceptando -para fijar ideas- que el módulo de elasticidad transversal es el mismo para ambos modelos estructurales y está gobernado por:

$$\varphi_2(y_G, z) = \varphi_2(y_G, -z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \mu_2 \left( \frac{2z}{b} \right)^2 \right] \left[ 1 + k_2 - (1 - k_2) \left( \frac{2y_G}{h} \right) \right] \quad (\text{E20.13})$$

siendo  $\mu_2$  y  $k_2$  constantes reales arbitrarias.

Recordando las expresiones (1.34) del factor de corte para barras rectas gruesas, teniendo en cuenta las (1.29), y por lo definido en (E20.11) será:

$$m^\infty = A^\infty \left( \frac{J^R}{J^\infty} \right)^2 \iint_{\Omega} \frac{\left( \frac{\tau_y}{Q} \right)^2}{\varphi_2(y_G, z)} d\Omega \quad (\text{E20.14})$$

A su vez partiendo de las expresiones (2.35) y (2.27) para el factor de corte para barras curvas gruesas considerando (E20.12) obtenemos con  $\tau_{\alpha z} = 0$

$$m^R = A^R R^3 \iint_{\Omega} \frac{\left( \frac{\tau_y}{Q} \right)^2}{r^3 \varphi_2(y_G, z)} d\Omega \quad (\text{E20.15})$$

donde sabemos que  $r = R_G - y_G$ .

Sean, por ejemplo, para fijar valores:

$$h = 50, b = 20, k_1 = 1.3, k_2 = 2.3, \mu_1 = -0.5, \mu_2 = 1.$$

Para barras rectas gruesas con (E20.14):  $m^\infty = 0.6112$

$$\text{Si } \varphi_1(y_G, z) = \varphi_2(y_G, z) = 1 \Rightarrow m^\infty = 1.2$$

Para barras curvas gruesas, con tres (3) valores de  $p = \frac{h}{R_G}$  obtenemos utilizando (E20.15):

$p = \frac{h}{R_G}$	$m^R$	$m^R (*)$
0.1	0.607404	1.199971
0.5	0.592229	1.199258
1	0.571955	1.196619

(\*) Valores correspondientes a  $\varphi_1(y_G, z) = \varphi_2(y_G, z) = 1$

Dos detalles finales. Obsérvese cómo el factor de corte puede variar significativamente para secciones con materiales funcionales y con él la importante incidencia en las ecuaciones de movimiento. Este ejemplo permite visualizar el alcance del TEOREMA GENERAL, al disponer con sólo una solución, la distribución tensional de las otras dos alternativas.

## APLICACIÓN 2: CÁLCULO DE FRECUENCIAS NATURALES

### APLICACIÓN 2.1: FRECUENCIAS NATURALES DE BARRAS RECTAS GRUESAS.

Para fijar ideas, trataremos la sección rectangular de un material funcionalmente graduado, para el caso abordado en el Ejemplo 4. O sea admitimos que

$$\varphi_j(y_G, z) = \varphi_j(y_G) = k_j + \frac{(1-k_j)}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{2y_G}{h}\right)^n \quad (j = 1, 2, 3) ; n \text{ constante real}$$

Hallaremos las tres primeras frecuencias circulares naturales para piezas de longitud  $L = x_L - x_0$  con  $x_0 = 0$ , diversas vinculaciones y distintas relaciones  $\frac{h}{L}$ .

#### ▪ Caso 1 de vinculación “S”

Corresponde a un apoyo doble en el punto "D" de alguna sección extrema, es decir:

$$u(\bullet) = 0$$

$$v(\bullet) = 0$$

$$M_D(\bullet) = 0 \Rightarrow \theta'(\bullet) = 0$$

#### ▪ Caso 2 de vinculación “E”

Corresponde a un empotramiento de alguna sección extrema: nulidad de las tres componentes cinemáticas, es decir:

$$u(\bullet) = 0$$

$$v(\bullet) = 0$$

$$\theta(\bullet) = 0$$

▪ Caso 3 de vinculación “F”

Corresponde a algún borde libre: nulidad de los tres esfuerzos característicos reducidos al punto "D", es decir:

$$\begin{aligned} N(\cdot) = 0 & \Rightarrow u'(\cdot) = 0 \\ M_D(\cdot) = 0 & \Rightarrow \theta'(\cdot) = 0 \\ Q(\cdot) = 0 & \Rightarrow v'(\cdot) + \theta(\cdot) = 0 \end{aligned}$$

▪ Caso 4 de vinculación “S<sub>δ</sub>”

Corresponde a un apoyo doble aplicado en un punto "C" que se encuentra a una distancia "δ" del punto "D" en algún extremo de la pieza (Ver APÉNDICE 4).

O sea:

$$\begin{aligned} u_C(\cdot) = 0 & \Rightarrow u(\cdot) + \theta(\cdot)\delta = 0 \\ v_C(\cdot) = 0 & \Rightarrow v(\cdot) = 0 \\ M_C(\cdot) = 0 & \Rightarrow A^\infty u'(\cdot)\delta + J^\infty \theta'(\cdot) = 0 \end{aligned}$$

Para hallar los valores de frecuencias  $\omega$  en radianes/segundo de más abajo, el autor ha resuelto el sistema diferencial (1.53) utilizando un algoritmo “*ad hoc*” en series de potencias, codificado en “*MatLab*”. Por supuesto la metodología de resolución es arbitraria y depende del usuario.

Para todos los casos abordados hemos adoptado:

$$E_0 = 2.1e^7, G_0 = \frac{E_0}{2.6}, \rho_0 = 7850e^{-6}$$

$$b = 25, h = 50, n = 3$$

$$k_1 = 0.3, k_2 = 1.3, k_3 = 2$$

Del Ejemplo 4 tenemos entonces para estos datos que:

$$m = 0.46174; \Delta = -5.52632$$

$$\alpha_0^\infty = 593.75, \alpha_2^\infty = 123793.8597$$

$$\beta_0^\infty = 2187.5, \beta_1^\infty = 16776.3158, \beta_2^\infty = 548303.3241$$

A su vez de acuerdo a las expresiones (1.49) obtenemos:

$$\mathcal{C}_{11}^\infty = 1.2469e^{10}, \mathcal{C}_{22}^\infty = 2.5887e^{12}, \mathcal{C}_{33}^\infty = 1.0386e^{10}$$

$$D_{11}^\infty = 17.1719, D_{22}^\infty = 131.6941, D_{33}^\infty = 4.3042e^3$$

		$S - S$		
$\frac{h}{L}$	1	0.5	0.1	0.025
$\omega_1$	950.2963	318.5000	15.2117	0.9595
$\omega_2$	1345.2605	805.9479	59.1792	3.8305
$\omega_3$	2095.6910	964.5615	127.6733	8.5928

		$E - E$		
$\frac{h}{L}$	1	0.5	0.1	0.025
$\omega_1$	1386.3457	561.2452	33.7991	2.1721
$\omega_2$	1498.9285	806.6805	89.3923	5.9702
$\omega_3$	2445.6503	1157.5360	166.4931	11.6570

		$E - F$		
$\frac{h}{L}$	1	0.5	0.1	0.025
$\omega_1$	1664.5540	292.1800	15.1265	0.9591
$\omega_2$	2185.8209	415.0279	58.4789	3.8277
$\omega_3$	2381.6927	834.5315	84.6755	8.5828

		$S_\delta - S_\delta$		$\delta = 10$	
$\frac{h}{L}$	1	0.5	0.1	0.025	
$\omega_1$	811.0838	255.6495	11.5486	0.7259	
$\omega_2$	2132.5428	1794.0848	60.1140	3.8345	
$\omega_3$	2736.2038	2088.1178	126.3689	8.4040	

## APLICACIÓN 2.2: FRECUENCIAS NATURALES DE BARRAS CURVAS GRUESAS.

Las frecuencias naturales que calcularemos, corresponderán a una barra curva gruesa de sección rectangular hueca de espesor constante homogénea, cuya distribución tensional y el cálculo del factor de corte, fueron resueltos en el Ejemplo 11.

Hallaremos las tres (3) primeras frecuencias circulares, para ménsulas en arco, con  $\alpha_T = \frac{\pi}{2}$  (donde  $\alpha_0 = 0$  y  $\alpha_L = \alpha_T$ ), dos (2) espesores " $t$ " y tres (3) relaciones " $\frac{h}{R_G}$ ".

Tal como se hizo en APLICACIÓN 2.1, utilizaremos series de potencias para resolver el sistema (2.54) y que hemos implementado en "*MatLab*".

Las seis (6) C.B. para el sistema estructural seleccionado son:

$$u(0) = 0 \quad (a) \quad ; \quad M_D(\alpha_T) = 0 \quad (d)$$

$$v(0) = 0 \quad (b) \quad ; \quad N(\alpha_T) = 0 \quad (e)$$

$$\theta(0) = 0 \quad (c) \quad ; \quad Q(\alpha_T) = 0 \quad (f)$$

O sea por (2.21) y (2.40) equivalen a:

$$u(0) = v(0) = \theta(0) = u'(\alpha_T) - v(\alpha_T) = \theta'(\alpha_T) = u(\alpha_T) + v'(\alpha_T) + R\theta(\alpha_T) = 0$$

Para todos los casos hemos adoptado que:

$$E_0 = 2.1e^{11}, G_0 = \frac{E_0}{2.6}, \rho_0 = 7850$$

$$b = 0.05, h = 0.1$$

Los coeficientes, según el caso, de cada sistema diferencial (2.54) se calculan de acuerdo a la expresión (2.49), utilizando a su vez los valores de " $\alpha_j^R$ " y " $\beta_j^R$ " ( $j = 0, 1, 2$ ) calculados en el Ejemplo 11

	$t = 0.002$		$\alpha_T = \frac{\pi}{2}$
$\frac{h}{R_G}$	1	0.5	0.1
$\omega_1$	22061	6148	280.52
$\omega_2$	33981	18309	1297.34
$\omega_3$	82035	31946	3817.48

	$t = 0.004$		$\alpha_T = \frac{\pi}{2}$
$\frac{h}{R_G}$	1	0.5	0.1
$\omega_1$	18556	6054	274.35
$\omega_2$	44884	18429	1271.69
$\omega_3$	57420	32020	3754.85

En las Referencias [1], [15] y [16] se pueden encontrar muchos más ejemplos de frecuencias naturales, tanto de arcos de diversas aberturas como anillos gruesos homogéneos y no homogéneos. Todavía en la Ref. [15] se desarrolla con mucho detalle el caso de un movimiento forzado de una anillo de sección rectangular hueca “composite” de tres (3) capas.

## PARTE SEXTA

### APÉNDICES

#### APÉNDICE 1: BARRAS GRUESAS: ECUACIONES LOCALES DE EQUILIBRIO ENTRE ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS

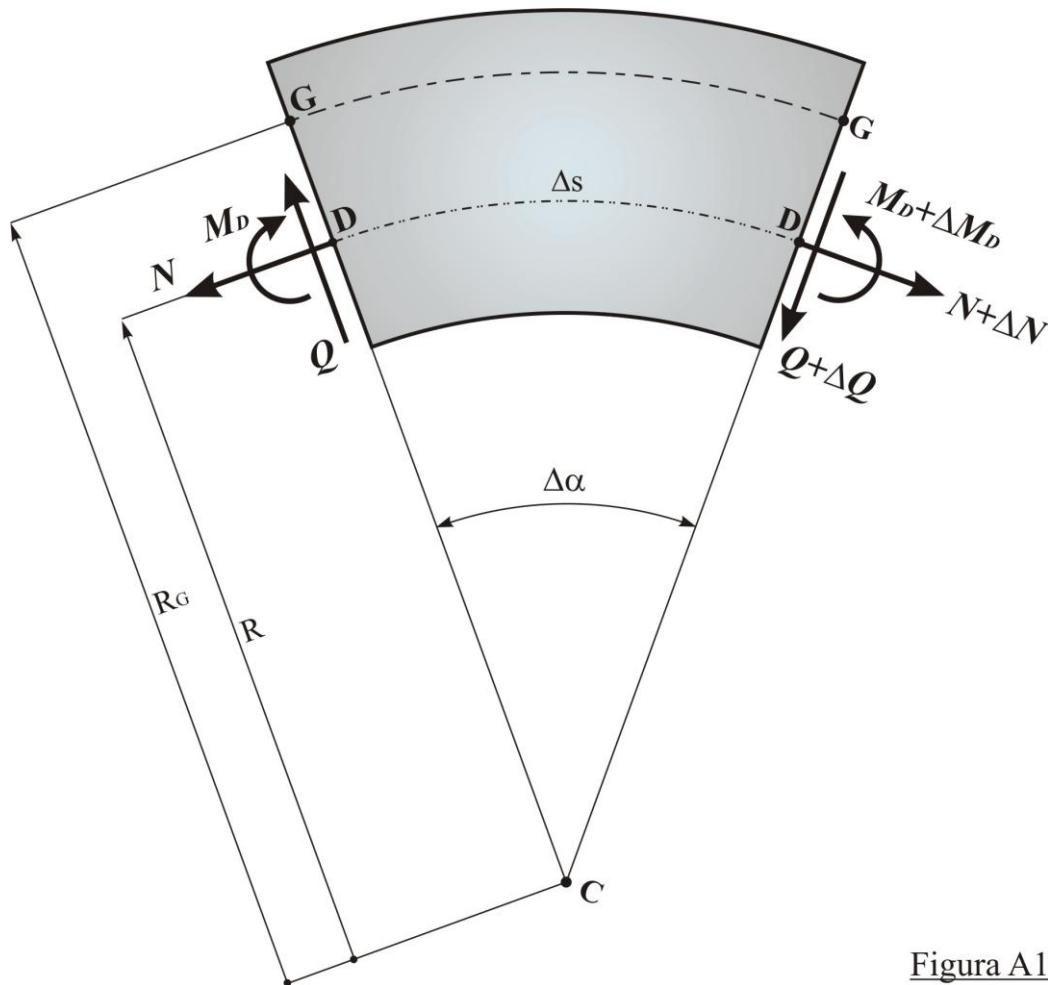


Figura A1

Observemos la Figura A1.

Sobre un elemento de arco subtendido por el ángulo " $\Delta\alpha$ " de la pieza curva gruesa en ausencia de fuerzas aplicadas (leer comentarios en APÉNDICE 7), imponemos las condiciones de la estática plana, dos (2) ecuaciones de proyección según dos direcciones ortogonales arbitrarias y una (1) de rotación alrededor de un punto arbitrario del plano, para garantizar el equilibrio. O sea por ejemplo:



$$(a) \quad Q \cos(\Delta\alpha) - N \sin(\Delta\alpha) - (Q + \Delta Q) = 0$$

$$(b) \quad Q \sin(\Delta\alpha) + N \cos(\Delta\alpha) - (N + \Delta N) = 0 \quad (A1.1)$$

$$(c) \quad [Q \cos(\Delta\alpha) - N \sin(\Delta\alpha)]R \sin(\Delta\alpha) + \\ + [Q \sin(\Delta\alpha) + N \cos(\Delta\alpha)]R (1 - \cos(\Delta\alpha)) + M_D - (M_D + \Delta M_D) = 0$$

Dividiendo las (A1.1) m. a m. por  $\Delta s$ , donde (ver Figura A1)

$$\Delta s = R \Delta\alpha \quad (A1.2)$$

y pasando al límite con  $\Delta\alpha \rightarrow 0 (\Rightarrow \Delta s \rightarrow 0)$  obtenemos

$$\begin{aligned} Q' + N &= 0 & ; & \quad \frac{dQ}{ds} + \frac{N}{R} = 0 \\ N' - Q &= 0 & ; & \quad \frac{dN}{ds} - \frac{Q}{R} = 0 \\ M_D' - RQ &= 0 & ; & \quad \frac{dM_D}{ds} - Q = 0 \end{aligned} \quad (A1.3)$$

Los acentos en la (A1.3) indican derivación respecto del ángulo " $\alpha$ ".

Encontrar las ecuaciones de equilibrio local para barras rectas gruesas, Figura A2, es relativamente sencillo.

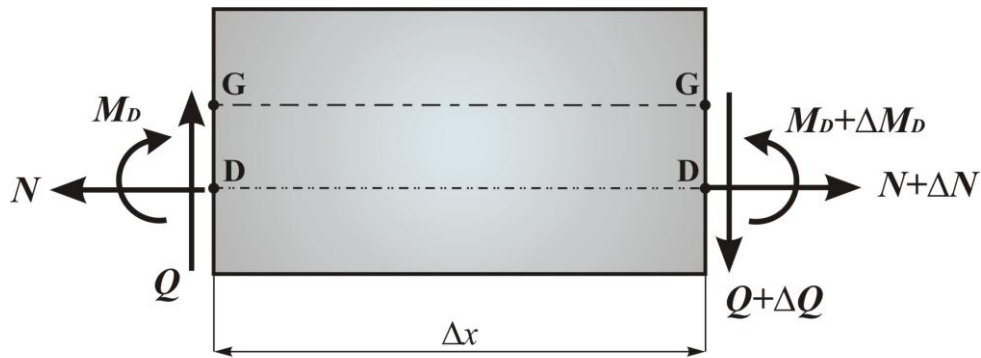


Figura A2

En efecto cuando  $R_G \rightarrow \infty$  también  $R \rightarrow \infty$  (y todo  $r \rightarrow \infty$ ) y  $\Delta s \rightarrow ds = dx$ , por lo tanto del segundo grupo de las (A1.3) obtenemos

$$\begin{aligned} (a) \quad Q' &= 0 \\ (b) \quad N' &= 0 \\ (c) \quad M'_D - Q &= 0 \end{aligned} \tag{A1.4}$$

Donde los acentos en la (A1.4) indican las derivadas respecto de "x".

## APÉNDICE 2: BARRAS RECTAS: CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD (CO) ENTRE FORMAS MODALES.

Introducimos para simplificar la escritura de este APÉNDICE 2 la nomenclatura que indicamos a continuación.

Sean  $F = F(x)$  y  $H = H(x)$  dos funciones espaciales continuas y acotadas dentro del dominio de interés, denominando como  $x_T$  a la longitud total de la barra recta, indicamos entonces como:

$$\langle F, H \rangle = \langle H, F \rangle = \int_{(x_T)} F(\eta) H(\eta) d\eta \tag{A2.1}$$

Esta definición de "producto interno", facilitará la manipulación algebraica que sigue.

Escribimos las ecuaciones (1.54) para una forma modal  $n$ -ésima  $(u_n, v_n, \theta_n)$ ; a la (1.54a) la multiplicamos por  $u_i$ , a la (1.54b) por  $v_i$  y a la (1.54c) por  $\theta_i$ , (observar que  $(u_i, v_i, \theta_i)$  corresponden a la forma modal  $i$ -ésima), obteniendo al integrarlas:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \langle [N'_n + \omega_n^2 (D_{11}^\infty u_n + D_{22}^\infty \theta_n)], u_i \rangle = 0 \\ (b) \quad & \langle [Q'_n + \omega_n^2 D_{11}^\infty v_n], v_i \rangle = 0 \\ (c) \quad & \langle [M'_{Dn} - Q_n + \omega_n^2 (D_{22}^\infty u_n + D_{33}^\infty \theta_n)], \theta_i \rangle = 0 \end{aligned} \tag{A2.2}$$

$(n, i = 1, 2, \dots)$

Análogamente planteamos las ecuaciones recíprocas, es decir:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \langle [N'_i + \omega_i^2 (D_{11}^\infty u_i + D_{22}^\infty \theta_i)], u_n \rangle = 0 \\ (b) \quad & \langle [Q'_i + \omega_i^2 D_{11}^\infty v_i], v_n \rangle = 0 \\ (c) \quad & \langle [M'_{Di} - Q_i + \omega_i^2 (D_{22}^\infty u_i + D_{33}^\infty \theta_i)], \theta_n \rangle = 0 \end{aligned} \tag{A2.3}$$

$(i, n = 1, 2, \dots)$

Efectuando simbólicamente lo siguiente  $[(A2.2a)-(A2.3a)] + [(A2.2b)-(A2.3b)] + [(A2.2c)-(A2.3c)]$ , integrando por partes, más las expresiones constitutivas y teniendo en cuenta las CB (1.51) donde por ejemplo  $|N_n u_i|_{x_0}^{x_L} = |N_n \mathcal{F}_i|_{x_0}^{x_L} = 0$  etc, obtendremos la 1ª Condición de Ortogonalidad (aceptando que cuando  $i \neq n$  entonces  $\omega_n^2 \neq \omega_i^2$ ):

$$D_{11}^{\infty}(\langle u_n, u_i \rangle + \langle v_n, v_i \rangle) + D_{22}^{\infty}(\langle \theta_n, u_i \rangle + \langle \theta_i, u_n \rangle) + D_{33}^{\infty} \langle \theta_n, \theta_i \rangle = 0 \quad (A2.4)$$

$$(n, i = 1, 2, \dots)$$

El caso  $i = n$  será tratado algo más abajo.

Utilizando las constitutivas dadas por las expresiones (1.21) y (1.39) para cada conjunto de formas modales escribimos:

$$N_n(x) = \mathcal{C}_{11}^{\infty} u_n'(x) ; M_{Dn}(x) = \mathcal{C}_{22}^{\infty} \theta_n'(x) ; Q_n(x) = \mathcal{C}_{33}^{\infty} (v_n'(x) + \theta_n(x)) \quad (A2.5)$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

Por otro lado efectuando simbólicamente  $[(A2.2a) + (A2.2b) + (A2.2c)]$ , integrando por partes, considerando las CB y tomando en consideración la (A2.4) se llega si  $i \neq n$  a la 2ª Condición de Ortogonalidad:

$$\frac{\langle N_n, N_i \rangle}{\mathcal{C}_{11}^{\infty}} + \frac{\langle M_{Dn}, M_{Di} \rangle}{\mathcal{C}_{22}^{\infty}} + \frac{\langle Q_n, Q_i \rangle}{\mathcal{C}_{33}^{\infty}} = 0 \quad (A2.6)$$

$$(n, i = 1, 2, \dots)$$

El caso  $i = n$  será tratado algo más abajo.

Escribamos una conclusión adicional que nos será útil en el ítem de Superposición Modal: la 3ª Condición de Ortogonalidad, que se obtiene si sumamos m. a m.  $[(A2.2a) + (A2.2b) + (A2.2c)]$  con  $i \neq n$  y utilizando (A2.4):

$$\langle N_n', u_i \rangle + \langle Q_n', v_i \rangle + \langle M_{Dn}' - Q_n, \theta_i \rangle = 0 \quad (A2.7)$$

$$(n, i = 1, 2, \dots)$$

Para finalizar este APÉNDICE 2 tratemos el caso de  $i = n$ . Las expresiones (A2.4), (A2.6) y (A2.7) son nulas para el caso de  $i \neq n$ . Una deducción similar a la que hicimos se analiza para el caso  $i = n$  donde obviamente  $\omega_n^2 \equiv \omega_i^2$ . Definimos la “norma”  $\|\mathcal{N}_n\|$  como:

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{N}_n\| &\equiv D_{11}^\infty (\langle u_n, u_n \rangle + \langle v_n, v_n \rangle) + 2D_{22}^\infty \langle \theta_n, u_n \rangle + D_{33}^\infty \langle \theta_n, \theta_n \rangle = \\
 &= \frac{1}{\omega_n^2} \left[ \frac{\langle N_n, N_n \rangle}{\mathcal{C}_{11}^\infty} + \frac{\langle M_{Dn}, M_{Dn} \rangle}{\mathcal{C}_{22}^\infty} + \frac{\langle Q_n, Q_n \rangle}{\mathcal{C}_{33}^\infty} \right] = \\
 &= -\frac{1}{\omega_n^2} \left[ \langle N_n', u_n \rangle + \langle Q_n', v_n \rangle + \langle M_{Dn}' - Q_n, \theta_n \rangle \right] \\
 &\quad (n=1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{A2.8}$$

Las  $\|\mathcal{N}_n\|$  son esencialmente positivas como se infiere directamente del segundo miembro de la derecha de (A2.8), recordando la definición (A2.1) y al ser “ $\alpha_0^\infty > 0$  y  $\alpha_2^\infty > 0$ ” también se cumple (observar (1.49)) que “ $\mathcal{C}_{11}^\infty > 0$ ,  $\mathcal{C}_{22}^\infty > 0$  y  $\mathcal{C}_{33}^\infty > 0$ ”.

### APÉNDICE 3: BARRAS CURVAS: CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD (CO) ENTRE FORMAS MODALES.

Introducimos en este APÉNDICE 2 por simplificación de escritura la nomenclatura siguiente:

Sean  $F = F(\alpha)$  y  $H = H(\alpha)$  dos funciones espaciales continuas y acotadas dentro del dominio de interés, denominando como  $\alpha_T$  a la abertura total de la barra curva, indicamos entonces como:

$$\langle F, H \rangle = \langle H, F \rangle = \int_{(\alpha_T)} F(\eta) H(\eta) d\eta \tag{A3.1}$$

Esta definición de “producto interno”, facilitará la manipulación algebraica que sigue.

Escribimos las ecuaciones (2.54) para una forma modal  $n$ -ésima  $(u_n, v_n, \theta_n)$ ; a la (2.54a) la multiplicamos por  $u_i$ , a la (2.54b) por  $v_i$  y a la (2.54c) por  $\theta_i$ , las integramos en  $\alpha$  m. a m. (observar que  $(u_i, v_i, \theta_i)$  corresponden a la forma modal  $i$ -ésima), obteniendo:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad &\langle [N_n' - Q_n + \omega_n^2 (D_{11}^R u_n + D_{22}^R \theta_n)], u_i \rangle = 0 \\
 (b) \quad &\langle [Q_n' + N_n + \omega_n^2 D_{11}^R v_n], v_i \rangle = 0 \\
 (c) \quad &\langle [M_{Dn}' - R Q_n + \omega_n^2 (D_{22}^R u_n + D_{33}^R \theta_n)], \theta_i \rangle = 0 \\
 &\quad (n, i=1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{A3.2}$$

Análogamente planteamos las ecuaciones recíprocas, es decir:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \langle [N'_i - Q_i + \omega_i^2 (D_{11}^R u_i + D_{22}^R \theta_i)], u_n \rangle = 0 \\
 (b) \quad & \langle [Q'_i + N_i + \omega_i^2 D_{11}^R v_i], v_n \rangle = 0 \\
 (c) \quad & \langle [M'_{Di} - R Q_i + \omega_i^2 (D_{22}^R u_i + D_{33}^R \theta_i)], \theta_n \rangle = 0 \\
 & (i, n = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{A3.3}$$

Efectuando simbólicamente lo siguiente  $[(A3.2a) - (A3.3a)] + [(A3.2b) - (A3.3b)] + [(A3.2c) - (A3.3c)]$ , integrando espacialmente por partes teniendo en cuenta las CB (2.52) en forma similar a lo expresado en este punto para barras gruesas rectas y de nuevo las expresiones (2.57) obtendremos la 1ª Condición de Ortogonalidad aceptando que si  $i \neq n$  entonces  $\omega_n^2 \neq \omega_i^2$ :

$$\begin{aligned}
 D_{11}^R (\langle u_n, u_i \rangle + \langle v_n, v_i \rangle) + D_{22}^R (\langle \theta_n, u_i \rangle + \langle \theta_i, u_n \rangle) + D_{33}^R \langle \theta_n, \theta_i \rangle = 0 \\
 (n, i = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{A3.4}$$

Es la expresión (2.55) del texto.

El caso  $i = n$  será tratado algo más abajo.

Por otro lado efectuando simbólicamente  $[(A3.2a) + (A3.2b) + (A3.2c)]$ , integrando por partes utilizando las constitutivas dadas por la expresión (2.57) y considerando las CB se llega si  $i \neq n$ , a la 2ª Condición de Ortogonalidad:

$$\begin{aligned}
 \frac{\langle N_n, N_i \rangle}{C_{11}^R} + \frac{\langle M_{Dn}, M_{Di} \rangle}{C_{22}^R} + \frac{\langle Q_n, Q_i \rangle}{C_{33}^R} = 0 \\
 (n, i = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{A3.5}$$

El caso  $i = n$  será tratado algo más abajo.

Escribamos una conclusión adicional que nos será útil en el ítem de Superposición Modal: la 3ª Condición de Ortogonalidad.

Si sumamos m. a m.  $[(A3.2a) + (A3.2b) + (A3.2c)]$  obtenemos para  $i \neq n$ :

$$\begin{aligned}
 \langle N'_n - Q_n, u_i \rangle + \langle Q'_n + N_n, v_i \rangle + \langle M'_{Dn} - R Q_n, \theta_i \rangle = 0 \\
 (n, i = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{A3.6}$$

Para finalizar este APÉNDICE 3 tratemos los casos de  $i = n$ . Las expresiones (A3.4), (A3.5) y (A3.6) son nulas para el caso de  $i \neq n$ . La deducción similar a la que hicimos para este caso se analiza para el caso  $i = n$  (obviamente  $\omega_n^2 \equiv \omega_i^2$ ). Definimos la “norma”  $\|\mathcal{N}_n\|$  como:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_n\| &\equiv D_{11}^R (\langle u_n, u_n \rangle + \langle v_n, v_n \rangle) + 2 D_{22}^R \langle \theta_n, u_n \rangle + D_{33}^R \langle \theta_n, \theta_n \rangle = \\ &= \frac{1}{\omega_n^2} \left[ \frac{\langle N_n, N_n \rangle}{\mathcal{C}_{11}^R} + \frac{\langle M_{Dn}, M_{Dn} \rangle}{\mathcal{C}_{22}^R} + \frac{\langle Q_n, Q_n \rangle}{\mathcal{C}_{33}^R} \right] = \\ &= -\frac{1}{\omega_n^2} \left[ \langle N_n' - Q_n, u_n \rangle + \langle Q_n' + N_n, v_n \rangle + \langle M_{Dn}' - R Q_n, \theta_n \rangle \right] \\ &\quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (\text{A3.7})$$

Las  $\|\mathcal{N}_n\|$  son positivas como se infiere directamente del segundo miembro de la derecha de (A3.7) recordando la definición (A3.1) y la positividad esencial de  $\mathcal{C}_{11}^R$ ,  $\mathcal{C}_{22}^R$  y  $\mathcal{C}_{33}^R$ .

#### APÉNDICE 4: CONDICIONES DE BORDE CON VARIACIONES ADMISIBLES QUE NO SON INDEPENDIENTES.

Cuando la vinculación de la pieza, geométrica o natural, no se presenta en o sobre el eje neutro (punto "D"), las variaciones admisibles " $\mathcal{F}$ ", " $\mathcal{G}$ " y " $\mathcal{H}$ " de los corrimientos básicos no son independientes entre sí y las CB son suma de Trabajos Virtuales. Igual situación se presenta en el caso en que la vinculación se materializa por medio de resortes o amortiguadores en los extremos de la barra.

Para fijar ideas (Figura A3)

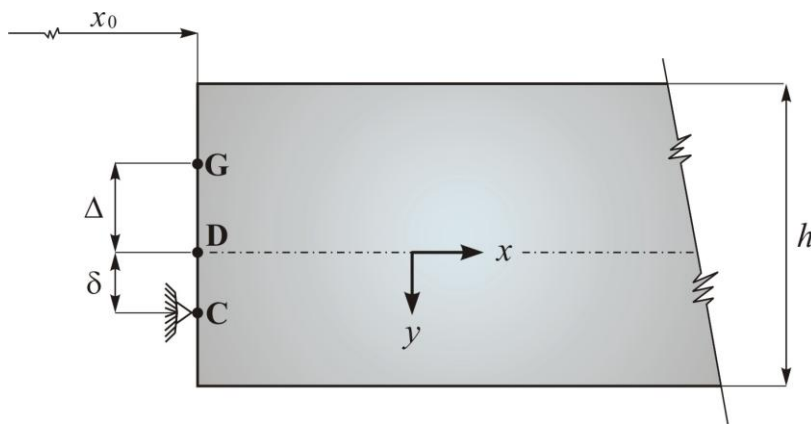


Figura A3

indiquemos las CB de una barra recta gruesa con un apoyo doble ubicado en un punto "C" a una distancia " $\delta$ " del punto "D", por ejemplo en  $x = x_0$ .

Las CB son evidentemente tres. Las dos geométricas o esenciales son:

$$u_C = 0 \quad (a) ; \quad v_C = 0 \quad (b) \quad (A4.1)$$

La tercera surgirá de las CB (1.51).

O sea de acuerdo a (1.3), escribimos (A4.1a) y (A4.1b) respectivamente como:

$$\begin{aligned} u(x_0, t) + \theta(x_0, t)\delta &= 0 \quad (a) \\ v(x_0, t) &= 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (A4.2)$$

Entonces surgen las correspondientes relaciones entre variaciones admisibles no todas independientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_0, t) &= -\mathcal{H}(x_0, t)\delta \quad (a) \\ \mathcal{G}(x_0, t) &= 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (A4.3)$$

Reemplazando las (A4.3) en las CB (1.51) se tiene para  $x = x_0$  que:

$$[N(x_0, t)\delta - M_D(x_0, t)]\mathcal{H}(x_0, t) = 0 \quad (A4.4)$$

O sea siendo  $\mathcal{H} \neq 0$  (puesto que el vínculo no restringe el giro flexional alrededor de "D") y de acuerdo a las ecuaciones constitutivas (1.21), la relación (A4.4) da lugar a la tercera CB (que es natural):

$$A^\infty u'(x_0, t)\delta - J^\infty \theta'(x_0, t) = 0 \quad (A4.5)$$

y que adicionamos a las (A4.2).

Este Apéndice, sólo pretende mostrar cómo deben tratarse los problemas de CB funcionalmente relacionadas. Ello conlleva a que las variaciones no serán independientes. El planteo de dichas CB, como vimos, es genéricamente la suma de trabajos virtuales en los extremos de la barras.

Esta argumentación evidentemente vale para barras gruesas curvas.

## APÉNDICE 5: REDUCCIÓN DE LOS SISTEMAS DIFERENCIALES PARA VIBRACIONES NATURALES A ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE SEXTO ORDEN.

Comencemos con la reducción del sistema (1.53) que gobierna las vibraciones naturales de barras rectas gruesas.

El sistema (1.53) puede presentarse, como es fácil observar, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(u) + \mathcal{M}_1(v) + \mathcal{N}_1(\theta) &= 0 \quad (a) \\ \mathcal{M}_1(u) + \mathcal{M}_2(v) + \mathcal{N}_2(\theta) &= 0 \quad (b) \\ \mathcal{N}_1(u) + \mathcal{N}_2(v) + \mathcal{N}_3(\theta) &= 0 \quad (c)\end{aligned}\tag{A5.1}$$

siendo  $\mathcal{L}_j(\cdot)$ ,  $\mathcal{M}_j(\cdot)$  y  $\mathcal{N}_j(\cdot)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) operadores diferenciales que valen

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\cdot) &= \mathcal{C}_{11}^\infty(\cdot)'' + \omega^2 D_{11}^\infty(\cdot) \\ \mathcal{M}_1(\cdot) &= 0 \\ \mathcal{N}_1(\cdot) &= \omega^2 D_{22}^\infty(\cdot) \\ \mathcal{M}_2(\cdot) &= -\left[\mathcal{C}_{33}^\infty(\cdot)'' + \omega^2 D_{11}^\infty(\cdot)\right] \\ \mathcal{N}_2(\cdot) &= -\mathcal{C}_{33}^\infty(\cdot)' \\ \mathcal{N}_3(\cdot) &= \mathcal{C}_{22}^\infty(\cdot)'' + \left[-\mathcal{C}_{33}^\infty + \omega^2 D_{33}^\infty\right](\cdot)\end{aligned}\tag{A5.2}$$

Los acentos, recordemos, indican derivada respecto de la coordenada  $x$ .

Entonces observando que (A5.1) puede considerarse como un “sistema diferencial” simétrico homogéneo cuyas componentes son los operadores diferenciales dados por las (A5.2), el “determinante diferencial” de los coeficientes debe ser nulo, o sea

$$\left[\mathcal{L}_1 \mathcal{M}_2 \mathcal{N}_3 + 2 \mathcal{M}_1 \mathcal{N}_2 \mathcal{N}_1 - (\mathcal{N}_1 \mathcal{N}_1 \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1 \mathcal{N}_3 + \mathcal{N}_2 \mathcal{N}_2 \mathcal{L}_1)\right](\cdot) = 0 \tag{A5.3}$$

(Si bien en este caso  $\mathcal{M}_1(\cdot) = 0$ )

Este es el operador diferencial ordinario de sexto orden al cual se reduce el sistema (A5.1). Como puede fácilmente inferirse la ecuación diferencial para vibraciones naturales de barras rectas gruesas, es, directamente la aplicación de este operador a cualquiera de las formas modales  $u(x)$ ,  $v(x)$  ó  $\theta(x)$ . Imponiendo que el coeficiente de la derivada de sexto orden sea la unidad en definitiva tendremos:

$$(\cdot)^{(6)} + P_2^\infty(\cdot)'''' + P_4^\infty(\cdot)'' + P_6^\infty(\cdot) = 0 \tag{A5.4}$$



donde:

$$\begin{aligned}
P_2^\infty &\equiv \omega^2 \left[ \frac{D_{11}^\infty}{\mathcal{C}_{11}^\infty \mathcal{C}_{33}^\infty} (\mathcal{C}_{11}^\infty + \mathcal{C}_{33}^\infty) + \frac{D_{33}^\infty}{\mathcal{C}_{22}^\infty} \right] \\
P_4^\infty &\equiv -\omega^2 \left\{ \frac{D_{11}^\infty}{\mathcal{C}_{22}^\infty} + \omega^2 \left[ \frac{D_{22}^{\infty 2}}{\mathcal{C}_{11}^\infty \mathcal{C}_{22}^\infty} - \frac{D_{11}^\infty D_{33}^\infty (\mathcal{C}_{11}^\infty + \mathcal{C}_{33}^\infty)}{\mathcal{C}_{11}^\infty \mathcal{C}_{22}^\infty \mathcal{C}_{33}^\infty} - \frac{D_{11}^{\infty 2}}{\mathcal{C}_{11}^\infty \mathcal{C}_{33}^\infty} \right] \right\} \\
P_6^\infty &\equiv \frac{D_{11}^\infty \omega^4}{\mathcal{C}_{11}^\infty \mathcal{C}_{22}^\infty} \left[ \omega^2 \frac{D_{11}^\infty D_{33}^\infty - D_{22}^{\infty 2}}{\mathcal{C}_{33}^\infty} - D_{11}^\infty \right]
\end{aligned} \tag{A5.5}$$

Si la barra recta tuviera sección homogénea (es decir  $(\varphi_j(y_G, z) = \text{constante}, j = 1, 2, 3)$ ), tendríamos que  $D_{22}^\infty = 0$ , con lo cual el “determinante diferencial” en este caso sería:

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{M}_2 \mathcal{N}_3 - \mathcal{N}_2 \mathcal{N}_2)(\cdot) = 0 \tag{A5.6}$$

En realidad, entonces, el sistema (A5.1) se disocia en:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(u) &= 0 \quad (a) \\
(\mathcal{M}_2 \mathcal{N}_3 - \mathcal{N}_2 \mathcal{N}_2)(\cdot) &= 0 \quad (b)
\end{aligned} \tag{A5.7}$$

El operador (A5.7b) puede aplicarse indistintamente a  $v(x)$  ó  $\theta(x)$ .

Las dos ecuaciones diferenciales (A5.7) corresponden al problema de vibraciones naturales de la “Viga Timoshenko” (ver por ejemplo Ref.[5]).

Para el caso de barras curvas gruesas, el procedimiento es análogo sólo que el sistema (2.54) si bien puede escribirse como el “sistema diferencial” (A5.1), el significado de los operadores diferenciales se modifica y es el que sigue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(\cdot) &\equiv \mathcal{C}_{11}^R(\cdot)'' + (-\mathcal{C}_{33}^R + \omega^2 D_{11}^R)(\cdot) \\
\mathcal{M}_1(\cdot) &\equiv -(\mathcal{C}_{11}^R + \mathcal{C}_{33}^R)(\cdot)' \\
\mathcal{N}_1(\cdot) &\equiv -(R \mathcal{C}_{33}^R - \omega^2 D_{22}^\infty)(\cdot) \\
\mathcal{M}_2(\cdot) &\equiv -[\mathcal{C}_{33}^R(\cdot)'' - (\mathcal{C}_{11}^R - \omega^2 D_{11}^R)(\cdot)] \\
\mathcal{N}_2(\cdot) &\equiv -R \mathcal{C}_{33}^R(\cdot)' \\
\mathcal{N}_3(\cdot) &\equiv \mathcal{C}_{22}^R(\cdot)'' - (R^2 \mathcal{C}_{33}^R - \omega^2 D_{33}^R)(\cdot)
\end{aligned} \tag{A5.8}$$

Los acentos, ahora indican derivación respecto de la coordenada angular  $\alpha$ .

De nuevo el “determinante diferencial” debe ser nulo y coincide formalmente con (A5.3), y puede aplicarse indistintamente a cualquiera de las tres formas modales. Si imponemos que el coeficiente de la derivada sexta sea igual a uno, podemos escribir, para barras curvas gruesas la ecuación diferencial a la cual se reduce el sistema (2.54) para el problema de frecuencias naturales, como:

$$(\cdot)^{(6)} + P_2^R(\cdot)'''' + P_4^R(\cdot)'' + P_6^R(\cdot) = 0 \quad (\text{A5.9})$$

Ahora hemos introducido:

$$\begin{aligned} P_2^R &\equiv 2 + \omega^2 \left[ \frac{D_{33}^R}{C_{22}^R} + \frac{D_{11}^R}{C_{11}^R} + \frac{D_{11}^R}{C_{33}^R} \right] \\ P_4^R &\equiv 1 + \omega^2 \left\{ \frac{2D_{33}^R}{C_{22}^R} - D_{11}^R \left( \frac{1}{C_{11}^R} + \frac{1}{C_{33}^R} + \frac{R^2}{C_{22}^R} \right) - \frac{2D_{22}^R}{C_{22}^R} + \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 \left[ \frac{D_{11}^{R^2}}{C_{11}^R C_{33}^R} - \frac{D_{22}^{R^2}}{C_{11}^R C_{22}^R} + \frac{D_{11}^R D_{33}^R}{C_{22}^R} \left( \frac{1}{C_{11}^R} + \frac{1}{C_{33}^R} \right) \right] \right\} \\ P_6^R &\equiv \frac{\omega^2}{C_{11}^R C_{22}^R C_{33}^R} \left\{ C_{11}^R C_{33}^R D_{33}^R + R^2 C_{11}^R C_{33}^R D_{11}^R - 2R C_{11}^R C_{33}^R D_{22}^R + \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 \left[ C_{33}^R D_{11}^R (2R D_{22}^R - D_{33}^R - R^2 D_{11}^R) - C_{11}^R (D_{11}^R D_{33}^R - D_{22}^{R^2}) \right] + \omega^4 D_{11}^R (D_{11}^R D_{33}^R - D_{22}^{R^2}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A5.10})$$

Cuando la barra curva sea de sección homogénea ( $\varphi_j(y_G, z) = \text{constante}, j = 1, 2, 3$ ), se deben modificar consecuentemente los coeficientes (A5.10). En este caso de sección homogénea, de un modo diferente a lo que sucede con barras rectas, se tiene todavía una ecuación diferencial de sexto orden, a la cual se reduce equivalentemente el sistema diferencial original para el problema de frecuencias naturales. Esta ecuación y para este caso de barra curva gruesa de sección homogénea, fue deducida previamente en la Ref.[1].

## APÉNDICE 6: ECUACIÓN CLÁSICA DE BARRAS CURVAS DELGADAS (DE PEQUEÑA CURVATURA) HOMOGÉNEAS.

Cuando se estudia el movimiento de barras delgadas homogéneas  $(\varphi_j(y_G, z) = 1, (j = 1, 2, 3))$  curvadas naturalmente, siempre, dentro de la RM, se aceptan algunas hipótesis adicionales como despreciar la deformación axial y la debida al esfuerzo de corte en la energía de deformación y descartar el aporte de la inercia rotatoria en la energía cinética. Esto conduce a la denominada teoría clásica de barras curvas de pequeña curvatura donde  $h/R_G \ll 1$ , por lo cual para estos casos puede aceptarse que  $r = R = R_G$ ; por lo dicho y considerando las expresiones generales de barras curvas (2.21a) y (2.40) que respectivamente corresponden al esfuerzo normal  $N$  y al esfuerzo de corte  $Q$ , al despreciar su influencia se verifica que:

$$u' - v = 0 \quad (a) \quad ; \quad u + v' + R\theta = 0 \quad (b) \quad (A6.1)$$

La condición (A6.1a) es la típica condición de inextensibilidad de la pieza.

Ahora bien debemos discutir dos cuestiones debidas a la aproximación que estamos tratando. En efecto. La primera es observar que en estas barras curvas de pequeña curvatura, que el valor de  $J^R$  dado por la expresión (2.20) que para material homogéneo, como ya señalemos previamente, vale  $J^R = R(R_G - R)\Omega$ , a su vez se transforma en  $J^R = J_G$  (resultado semejante al caso de barras rectas cuando  $R_G \rightarrow \infty$ ). Recordemos que  $\Omega$  es el área de la sección transversal de la barra y que  $J_G$  es el momento de inercia baricéntrico de dicha sección respecto del eje  $z_G$ .

La segunda cuestión es más profunda. Despreciar el efecto de la deformación axial y del esfuerzo de corte, no significa que sean nulos los esfuerzos  $N$  y  $Q$ , ya que forzosamente deben existir por el cumplimiento del equilibrio. Por lo tanto teniendo en cuenta la expresión (2.20) y observando respectivamente las expresiones (2.21a) y (2.40) y por lo dicho en el párrafo anterior, deberá verificarse que

$$\frac{1}{\alpha_0^R} \rightarrow 0 \quad (A6.2)$$

que equivale a la nulidad de las rigideces axial y por corte.

Además recordando la expresión (2.46) de la energía cinética, al despreciar el aporte de la inercia rotatoria, aceptamos, que para la teoría clásica de barras curvas delgadas, debe cumplirse que

$$\beta_1^R = \beta_2^R = 0 \rightarrow 0 \quad (\text{A6.3})$$

Entonces las ecuaciones (A6.2) y (A6.3) conducen de acuerdo a las expresiones (2.49) a lo siguiente:

$$\frac{1}{C_{11}^R} = \frac{1}{C_{33}^R} \rightarrow 0 \quad ; \quad D_{22}^R = D_{33}^R = 0 \quad (\text{A6.4})$$

De esta manera presentamos a las componentes de desplazamiento en función del corrimiento tangencial  $u$  y sus derivadas, utilizando las restricciones (A6.1):

$$v = u' \quad ; \quad \theta = -\frac{1}{R}(u + u'') \quad (\text{A6.5})$$

Debido a las condiciones (A6.4), las expresiones (A5.10) del APÉNDICE 5, para el caso particular que nos ocupa, con  $R = R_G$ , se reducen en el límite a:

$$\begin{aligned} P_2^R &\equiv 2 \\ P_4^R &\equiv 1 - \frac{D_{11}^R}{C_{11}^R} R_G^2 \omega^2 \\ P_6^\infty &\equiv \frac{D_{11}^R}{C_{22}^R} R_G^2 \omega^2 \end{aligned} \quad (\text{A6.6})$$

Recurriendo a las definiciones (2.49) y teniendo en cuenta la expresión (2.20) de  $J^R (= J_G)$  y la (2.44) de  $\beta_0^R$  (con  $r = R_G$ ) escribimos que:

$$\begin{aligned} C_{22}^R &= E_0 \alpha_2^R = E_0 \frac{J_G}{R_G} \\ D_{11}^R &= \rho_0 \beta_0^R = \rho_0 R_G \Omega \end{aligned} \quad (\text{A6.7})$$

Finalmente, escribamos para barras curvas delgadas de pequeña curvatura la ecuación diferencial clásica en el corrimiento tangencial, que gobierna las vibraciones naturales de este tipo estructural. Para ello recurrimos a la ecuación (A5.9) considerando todas las simplificaciones asumidas más arriba, obteniendo:

$$u^{(6)} + 2u'''' + \left(1 - \frac{\rho_0 \Omega}{E_0 J_G} \omega^2 R_G^4\right) u'' + \frac{\rho_0 \Omega}{E_0 J_G} \omega^2 R_G^4 u = 0 \quad (\text{A6.8})$$

Coincide con la reportada en la Referencia [2], aunque Love la presenta solamente para barras de pequeña curvatura con sección circular.

## APÉNDICE 7: UN CONCEPTO ADICIONAL

Aceptar la coexistencia de las expresiones (1.32) y (1.36) para la energía de deformación, implica una situación contradictoria. En efecto, la expresión (1.32) presenta un aporte energético debido a  $\tau_{xz}$  en barras rectas (y  $\tau_{\alpha z}$  en barras curvas), cuando como aceptamos en (1.36) partimos de una distorsión angular  $\gamma_{xz}$  (ó  $\gamma_{\alpha z}$ ) nula (sin deformación no existiría el aporte energético correspondiente) Esta situación entonces deberá entenderse en principio como otra hipótesis dentro del encuadre que propone la RM y como un postulado de la presente monografía. Esto es, el autor decidió incorporar dentro de la definición del factor de corte, los aportes de ambas tensiones tangenciales. Es evidente que podría haberse descartado la influencia de  $\tau_{xz}$  (ó  $\tau_{\alpha z}$ ). Sin embargo, la decisión se fundamenta en dos cuestiones importantes. Una es que  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{xy}$  (ó  $\tau_{\alpha z}$  y  $\tau_{\alpha y}$ ) están vinculadas ineludiblemente por las condiciones de equilibrio que no podrían en general satisfacerse con sólo una de ellas. El segundo argumento, siendo como dijimos, la RM y por ende el presente desarrollo da lugar a una manera muy práctica y directa de convalidar resultados numéricos debidos a métodos computacionales más complejos. La experiencia entonces en tales comparaciones, avalan adicionalmente la manera de deducir el factor de corte con toda su influencia.

Este APÉNDICE se aplica naturalmente a barras gruesas curvas.

## APÉNDICE 8: COMENTARIOS ACERCA DE LA FORMA DE DEDUCIR EL FACTOR DE CORTE “ $m$ ”.

Al plantear las ecuaciones de equilibrio interno, tanto en barras rectas gruesas (ecuación (1.23)), como en barras curvas gruesas (ecuación (2.24)), el término independiente depende de la derivada espacial del correspondiente valor de la tensión  $\sigma$  (respectivamente ecuaciones (1.22) y (2.22)). Al plantear dicha derivada recurrimos a las ecuaciones de equilibrio (APÉNDICE 1) entre esfuerzos característicos que intervienen en los valores de  $\sigma$  y de los  $\tau$  pero bajo la exigencia de dejar de lado las fuerzas inerciales y las aplicadas a la barra.

Digamos, y es importante aclararlo, que si bien, al presentar respectivamente las ecuaciones (A1.4)  $\equiv$  (1.24) y (A1.3) donde no hemos incluido fuerza externa alguna, podría haberse considerado a las cargas transversales -que en ambos casos denominamos como  $p_y$ -, sin que cambien las conclusiones ni deducciones posteriores. En cambio y tal como sucede clásicamente en el problema de Collignon, es inevitable para obtener el factor de corte " $m$ ", trabajar en ausencia de fuerzas externas axiales. Es decir, y es la justificación de incluir este APÉNDICE: la forma de calcular el factor de corte sería totalmente válida si nos ocupáramos exclusivamente de problemas de frecuencias naturales y sus formas modales donde se dejan de lado las cargas aplicadas. Al desarrollar y fundamentar vibraciones forzadas con cargas externas generales, las propuestas (1.29) y (2.27) dejan de ser formalmente correctas dentro del encuadre considerado. A los fines prácticos y como por otro lado es tradicionalmente aceptado, en el presente trabajo recurrimos a la manera (energética) elegida para obtener el factor de corte aun cuando tengamos cargas axiales y momentos distribuidos sobre el eje neutro que provienen de dichas acciones.

Concluimos diciendo, que de alguna forma lo dicho más arriba, podría pensarse como otra aproximación de la Resistencia de Materiales, que nos evita considerar (y que tal vez ni siquiera sea posible) la dependencia del factor de corte de las cargas aplicadas (!) lo que quitaría sentido universal a la propuesta y su carácter exclusivamente físico-geométrico al importante parámetro de corte.

## REFERENCIAS

- [1] Filipich, C.P. “Vibraciones Libres en su plano de Arcos y Anillos circunferenciales con Diversas Complejidades “. Tesis Doctoral. Argentina. Universidad Nacional de Córdoba; (1991).
- [2] Love, A.H.E. “A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity”. New York Dover Publications; (1934).
- [3] Belluzzi, O. “Scienza delle Costruzioni”. Zanichelli editore Bologna; (1965).
- [4] Timoshenko, S. “Resistencia de Materiales”. Espasa Calpe Madrid; (1970).
- [5] Fung, Y.C. “Foundations of Solid Mechanics”. Prentice-Hall of India Private Limited. New Delhi; (1968).
- [6] Weinberger, H.F. “A First Course in Partial Differential Equations”. Blaisdell Publishing Company Walthman, Massachusetts. Toronto. London; (1965).
- [7] Mindlin, R.D. “Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates”. J.App.Mech.Trans-ASME. (1951) (73).
- [8] Cowper, G.R. “The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beams Theory”. J.App.Mech.Trans-ASME; (1966) (33).
- [9] Romanelli, E. “El Factor de Cortadura y el Alabeo”. XX Jornadas Sudamericanas de Ing. Estructural. Córdoba. Argentina. (1979).
- [10] Davis, R, Henshell, R.D. and Warburton, C.B “Constant Curvature Beam. Finite Elements for In-Plane Vibration”. J. of S. and Vib. (1972) (4).
- [11] Rossi, R.E. and Laura, P.A.A. “Free In-Plane Vibrations of Circular Rings with Radial Supports Taking into account Shear and Rotatory Inertia Effects”. J.Accoust.Soc.Am. (1989) (86).
- [12] Jong-Shyong Wu and Lih-Kwang Chiang “Free Vibration of a Circularly Curved Timoshenko Beam Normal to its Initial using Finite Curved Beams Elements”. Computers and Structures. (2004) (82).
- [13] Howson, W.P. and Jemah, A.K. “Exact Out-of-Plane Natural Frequencies of Curved Timoshenko Beams”. J. Eng.Mech. ASCE. (1999) (125)(1).
- [14] Kim, J.G. and Lee, J.K. “Free Vibration Analysis of Arches based on the Hybrid-Mixed Formulation with Consistent Quadratic Stress Functions” . Computers and Structures. (2008) (86).
- [15] Filipich, C.P. , Piovan, M.T. , Ramírez, J.M. and Domini, S. “A Model for forced Vibrations of Ceramic/Metallic Thick Rings”.Int. J. of Eng. Sci. (2011) (49).
- [16] Filipich, C.P. and Piovan, M.T “The Dynamics of Thick Curved Beams constructed with Functionally Graded Materials” Mech. Research Commun. (2010) (37).
- [17] McConnell, A.J. “Applications of Tensor Analysis” Dover Publications, Inc New York. (1957)
- [18] Timoshenko, S. and Goodier, J.N. “Theory of Elasticity”. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York. (1934)